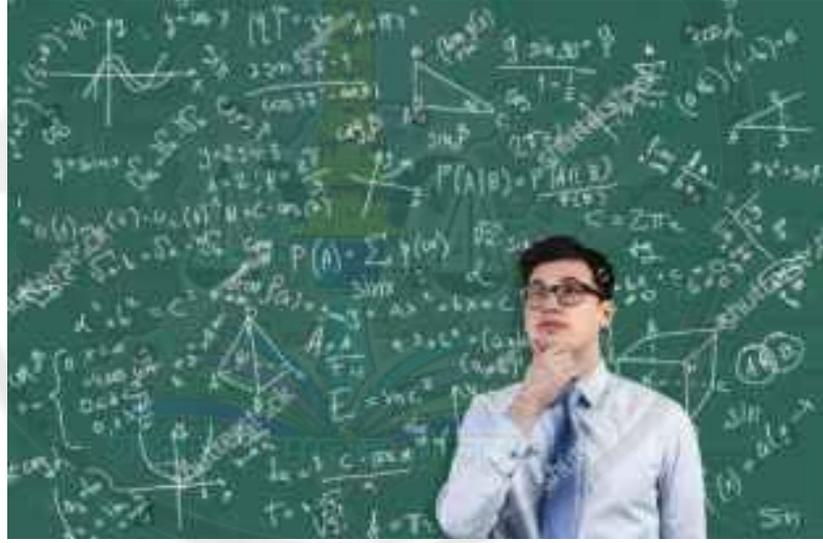


# निदेशालय, माध्यमिक शिक्षा, राजस्थान, बीकानेर

## प्रयास-2018

### विषय – गणित

### कक्षा – 10



माध्यमिक परीक्षा परिणाम में गुणात्मक एवं संख्यात्मक उन्नयन हेतु अभिनव कार्ययोजना के तहत निर्मित अध्ययन सामग्री

निदेशालय, माध्यमिक शिक्षा, राजस्थान, बीकानेर

बोर्ड परीक्षा परिणाम उन्नयन हेतु राज्य स्तरीय गणित  
कार्यशाला

## प्रयास—2018

**मार्ग दर्शन**

नथमल डिडेल I.A.S.

निदेशक

**दिशा—निर्देश**

भरत कुमार मेहता

उप निदेशक (माध्यमिक) उदयपुर

नरेश चन्द्र डांगी

जिला शिक्षा अधिकारी (मा.—प्रथम) उदयपुर

**नोडल अधिकारी**

अरुण कुमार शर्मा

सहायक निदेशक, निदेशालय, मा.शि., राजस्थान, बीकानेर

**आयोजन प्रभारी**

भैरूलाल तेली

प्रधानाचार्य, रा.गु.गो.सिंह उ.मा.वि., उदयपुर

सुरेन्द्र सिंह राव

सहायक निदेशक, का. उप निदेशक (माध्यमिक) उदयपुर

शान्ति लाल चौबीसा

शै.प्र. अधिकारी, का. उप निदेशक (माध्यमिक) उदयपुर

**पर्यवेक्षण**

सुभाष माचरा

शै.प्र. अधिकारी, निदेशालय, मा.शि., राजस्थान, बीकानेर

निदेशालय, माध्यमिक शिक्षा, राजस्थान, बीकानेर

# प्रयास—2018

## विषय – गणित

(पाठ्य सामग्री)

कक्षा – 10

### अनुक्रमणिका

क्र. सं.	अध्याय संख्या	अध्याय का नाम	अंकभार	पृष्ठ संख्या
1	1	वैदिक गणित (Vedic Mathematics)	4	4–13
2	2	वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers)	3	14–17
3	3	बहुपद (Polynomials)	4	18–22
4	4	दो चरों वाले रैखिक समीकरण एवं असमिकाएँ (linear Equation and Inequations in two variables)	5	23–26
5	5	समान्तर श्रेणी (Arithmetic Progression)	3	27–29
6	6	त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometry Ratios)	3	30–33
7	7	त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ (Trigonometry Identities)	5	34–36
8	8	ऊँचाई और दूरी (Height and Distance)	3	37–38
9	9	निर्देशांक ज्यामिति (Co-ordinate Geometry)	6	39–46
10	10	बिन्दु पथ (Locus)	1	47–49
11	11	समरूपता (Similarity)	9	50–55
12	12	वृत्त (Circle)	4	56–59
13	13	वृत्त एवं स्पर्श रेखा (Circle and Tangent)	3	60–61
14	14	रचनाएँ (Constructions)	3	62–63
15	15	वृत्त की परिधि एवम् क्षेत्रफल (Circumference of a Circle and Area)	4	64–68
16	16	पृष्ठीय क्षेत्रफल एवम् आयतन (Surface Area and Volume)	6	69–71
17	17	केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप (Measures of Central Tendency)	6	72–74
18	18	प्रायिकता (Probability)	4	75–77
19	19	सड़क सुरक्षा शिक्षा (Road Safety Education)	4	78–79
20	–	संभागियों की सूची	–	80–81

## अध्याय - 1

## वैदिक गणित

अंक भार - 4

## एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा गुणा करना

(1) Type -I जब आधार 10 हो

1) 15	2) 25	3) 32	4) 53	5) 122
<u>x 15</u>	<u>x 25</u>	<u>x 38</u>	<u>x 57</u>	<u>x 128</u>
$1 \times 1/5 \times 5$	$2 \times 2/5 \times 5$	$3 \times 3/16$	$30/21$	$12 \times 12/16$
(प्रथमखण्ड / द्वितीयखण्ड)			= 3021	= 15616
= $1 \times 2/25$	= $2 \times 3/25$	= 1216 (12 कैसे आया ?)		
= 225	= 625			

ध्यान से देखें

यहाँ सभी उदाहरणों में

(1) इकाई के अंको का योग 10 है।

(2) दहाई के अंक समान है।

करके सीखें -

1) 24	2) 32	3) 43	4) 27
<u>x 26</u>	<u>x 38</u>	<u>x 47</u>	<u>x 23</u>

नियम - एकाधिकेन पूर्वेण की गुणन संक्रिया में जब इकाई के अंको का योग 10 होता है तब इकाई के अंको को गुणा करके संख्या को (गुणनफल को) द्वितीय खण्ड में लिख देते हैं।

(2) दहाई के अंक को उसके एकाधिक से गुणा करके गुणनफल को प्रथम खण्ड में लिख देते हैं।

प्रयास करें

1) 82	2) 54	3) 29	4) 152
<u>x 88</u>	<u>x 56</u>	<u>x 21</u>	<u>x 158</u>

Type -II जब आधार 100 हो

1) 512	2) 392	3) 811
<u>x 588</u>	<u>x 308</u>	<u>x 889</u>
$5 \times 5/12 \times 188$	$3 \times 3/92 \times 08$	$8 \times 8/11 \times 89$
= $5 \times 6/1056$	= $3 \times 4/736$	= $72/0979$
= $30/1056$	= $12/0736$	= $720979$
= 309056	= 120736	

ध्यान से देखें

(1) यहाँ सभी उदाहरणों में इकाई के अंको का योग तो 10 है परन्तु शेष अंक समान नहीं है अतः यहाँ हम इकाई व दहाई अंको का योगफल करेंगे जो 100 है। जैसे 512 व 588 में  $12+88=100$

(2) सैकड़े का अंक समान है।

करके सीखें

1) 108	2) 266	3) 390	4) 584
--------	--------	--------	--------

x 192                      x 234                      x 310                      x 516  
 नियम— एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा गुणन संक्रीया में जब ईकाई व दहाई के अंको का योग 100 हो तब ईकाई व दहाई के अंको को गुणा करके गुणनफल को द्वितीय खण्ड में लिख देते है व सैंकड़े के अंक को उसके एकाधिक से गुणा करके प्रथम खण्ड में लिख देते है।

**Note-** यहाँ आधार 100 होने के कारण द्वितीय खण्ड में चार अंक होने अनिवार्य है यदि चार अंक नहीं है तो संख्या के पूर्व में शून्य लगाकर चार अंक करेंगे।

उदाहरण  $06 \times 94 = 564$ , इसे 0564 लिखेंगे।

प्रयास करें 1)  $522 \times 578$                       2)  $608 \times 692$                       3)  $314 \times 386$                       4)  $213 \times 287$

### Type - III

एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा भिन्नों की गुणा करना

$$\begin{array}{lll}
 1) 3\frac{1}{3} \times 31\frac{2}{3} & 2) 21\frac{1}{5} \times 21\frac{4}{5} & 3) 15\frac{2}{7} \times 15\frac{5}{7} \\
 = 31 \times 31 / \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} & = 21 \times 21 / \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} & = 15 \times 15 / \frac{2}{7} \times \frac{5}{7} \\
 = 31 \times 32 / \frac{2}{9} & = 462 / \frac{4}{25} & = 240 / \frac{10}{49} \\
 = 992 \frac{2}{9} & & 
 \end{array}$$

### ध्यान से देखें

(1) यहाँ सभी उदाहरणों में भिन्न संख्या का योग 1 है जैसे उदाहरण (1) में  $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$

(2) पूर्ण संख्या समान है।

करके सीखें

$$1) 12\frac{2}{5} \times 12\frac{3}{5} \qquad 2) 16\frac{1}{7} \times 16\frac{6}{7} \qquad 3) 25\frac{1}{4} \times 25\frac{3}{4}$$

नियम – (1) भिन्न संख्या का गुणन द्वितीय खण्ड में लिखते है।

(2) पूर्ण संख्या को एकाधिक से गुणा करके प्रथम खण्ड में लिखते हैं।

प्रयास कीजिए।

$$1) 11\frac{1}{6} \times 11\frac{5}{6} \qquad 2) 33\frac{1}{3} \times 33\frac{2}{3} \qquad 3) 24\frac{1}{6} \times 24\frac{5}{6} \qquad 4) 18\frac{1}{4} \times 18\frac{3}{4}$$

### उपसूत्र :- यावदूनम तावदूनी कृत्य वर्गम् च योजयेत्

यावदूनम तावदूनी में आधार से जितन विचलन हो, उतना जोडते है।

$$\begin{array}{ll}
 \text{जैसे उदाहरण 1. } 16^2 = 16 + 6/6^2 & \text{आधार} = 10 \text{ विचलन} = 6 \\
 = 22/36 & = 256
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{उदाहरण 2. } 93^2 = 93 - 07/07^2 & \text{आधार} = 100 \text{ विचलन} = -07 \\
 = 86/49 & = 8649 \\
 & \text{(आधार 100 में शून्य अतः दाहिने खण्ड में दो अनिवार्य)}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{उदाहरण 3. } 43^2 = 4(43 + 3) - 07/07^2 & \text{आधार} = 10 \\
 & \text{उपआधार} = 4 \times 10 \\
 & \text{विचलन} = +3 \\
 = 4(46)/9 & \\
 = 184/9 & \\
 = 1829 & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{उदाहरण 4. } 327^2 = 3(327 + 27)/27^2 & \text{आधार} = 10
 \end{array}$$

$$\text{उपआधार} = 3 \times 10$$

$$\text{विचलन} = 27$$

$$= 3(354)/729$$

(आधार 100 में दो शून्य अतः दाहिने खण्ड में दो अंक)

$$= 1062/729$$

$$= 106929$$

करके सीखें

निम्न संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए—

(1)  $13^2$

(2)  $104^2$

(3)  $37^2$

(4)  $221^2$

नियम : (1) आधार एवं उपआधार लिखें। उत्तर के लिए दो खण्ड बनाना।

(2) आधार या उपाधार के सापेक्ष किसी संख्या में न्यूनता हो तो उस न्यूनता को घटाना एवं अधिकता हो तो उस अधिकता को जोड़ना।

(3) द्वितीय खण्ड में न्यूनता अथवा अधिकता का वर्ग लिखना।

(4) आधार अथवा उपाधार में जितने शून्य हो उतने अंक द्वितीय खण्ड में रखना। अंक कम होने पर द्वितीय खण्ड की संख्या के पहले निर्धारित संख्या में शून्य लगाना एवं अधिक हो तो प्रथम खण्ड में स्थानान्तरण।

### निखिलम विधि से घनफल

$$14^3 = 14 \text{ का घनफल}$$

संख्या	विचलन
14	+4 (आधार -10)
14	+4 (आधार -10)
14	+4 (आधार -10)

$$14+4+4/4 \times 4+4 \times 4+4 \times 4/4 \times 4 \times 4$$

विचलन को तीन बार गुणा

दो-दो विचलन का गुणा तथा तीनों का जोड़ शून्य

$$22/16 + 16 + 16/64$$

$$22/48/64$$

आधार 10 में एक शून्य है अतः एक अंक रखकर दूसरा अंक अगले खण्ड में जोड़ते हैं।

$$22/48 + 6/4$$

$$22/54/4$$

आधार 10 में एक शून्य है अतः पुनः वही प्रक्रीया दोहरायेंगे।

$$22 + 5/4/4$$

$$2744$$

$$99^3 = 99 \text{ का घनफल}$$

संख्या	अविचलन
99	-1 (आधार -100)
99	-1 (आधार -100)
99	-1 (आधार -100)

$$99-1-1/(-)1 \times (-)1 \times (-)1 + (-)1 \times (-)1 \times (-)1 + (-)1 \times (-)1 \times (-)1 / -1 \times -1 \times -1$$

$$97/1 + 1 + 1/-01$$

$$97/3/ -01$$

$$9702/100 - 1$$

$$9702/99 = 970299$$

### आनुरूपेण विधि

दो अंको की संख्या का वर्ग ज्ञात करना

उदाहरण : 1

56 का वर्ग ज्ञात कीजिए।

$$a = 5$$

$$b = 6$$

I $(5)^2$	II $5 \times 6 = 30$ $+30$	III $(6)^2$
25	$60$	36
	$25 + 6$ $36$	
	$3136$	

उदाहरण : 2

41 का वर्ग ज्ञात कीजिए।

$$a = 4$$

$$b = 1$$

I $(4)^2$	II $4 \times 1 = 04$ $+04$	III $(1)^2$ प्रथम चरण द्वितीय चरण
16	$08$	01
	$16$ $81$	
	$1681$	

नियम :

- (1) इस विधि द्वारा दो अंको की किसी भी संख्या का वर्ग किया जा सकता है।
- (2) दहाई अंक को "a" तथा इकाई अंक को "b" माना जा सकता है।
- (3) उत्तर के लिए तीन खण्ड बनाये जाते हैं
- (4) प्रथम खण्ड (1)  $a^2$   
द्वितीय खण्ड (2)  $a \times b$   
तृतीय खण्ड (3)  $b^2$

**घनफल :-**

- नियम :-) इस विधि द्वारा दो अंको की किसी भी संख्या का घनफल किया जा सकता है।
- (2) दहाई अंक को "a" तथा इकाई अंक को "b" माना जा सकता है।
  - (3) उत्तर के लिए चार खण्ड बनाये जाते हैं
  - (4) प्रथम खण्ड  $a^3$  तथा चर्तुथ खण्ड में  $b^3$  लिखा जाता है।
  - (5) द्वितीय खण्ड  $a^2b$  तथा तृतीय खण्ड में  $b^2a$
  - (6) द्वितीय एवं तृतीय खण्ड में प्राप्त गुणनफल का दुगुना उसी खण्ड में जोड़ते है।
  - (7) अन्त में प्रत्येक खण्ड में एक अंक रखते हुऐ अभीष्ट घनफल प्राप्त करते है।

अभ्यास 10 से 99 तक की कोई भी संख्या लेकर उसका घनफल ज्ञात करें एवं सामान्य गुणा कर उत्तर की जाँच करें।

प्रयास करें

(1) 14	(2) 23	(3) 37	(4) 42
--------	--------	--------	--------

I $(दहाई)^3$	II $(दहाई)^2 \times इकाई + दुगुना$	III $(दहाई) \times (इकाई)^2 + दुगुना$	IV $(इकाई)^3$
प्रत्येक खण्ड में एक अंक			
I $a^3$	II $a^2b$	III $ab^2$	IV $b^3$
	$+2a^2b$	$+2ab^2$	

## द्वन्द्व योग विधि से वर्ग ज्ञात करना:-

उदाहरण -1  $(134)^2$ 

1 का द्वन्द्व योग / 13 का द्वन्द्व योग / 134 का द्वन्द्व योग ।

34 का द्वन्द्व योग / 4 का द्वन्द्व योग ।

$$1^2 / 1 \times 3 \times 2 / 1 \times 4 \times 2 + 3^2 / 3 \times 4 \times 2 / 4^2$$

$$1/6 / 8 + 9 / 24 / 16$$

$$1/6 / 17 / 24 / 16$$

**17956**उदाहरण -2  $(83)^2$ 

8 का द्वन्द्वयोग / 83 का द्वन्द्व योग / 3 का द्वन्द्व योग ।

$$8^2 / 8 \times 3 \times 2 / 3^2$$

$$= 64 / 48 / 9$$

$$= 64 / 48 / 9$$

**= 6889**

संकेत-

(i) एक अंक की संख्या का द्वन्द्व योग

जैसे 5 का योग -  $5^2 = 25$ 

(ii) दो अंकों की संख्या का द्वन्द्व योग

दोनों अंकों का गुणा X 2

जैसे - 85 का द्वन्द्व योग  $8 \times 5 \times 2$ 

(iii) तीन अंकों की संख्या का द्वन्द्व योग

प्रथम अंक X तृतीय अंक  $X^2 +$  द्वितीय का वर्गजैसे - 278 का द्वन्द्व योग  $2 \times 8 \times 2 + 7^2$ 

चार अंको कि संख्या का द्वन्द्व योग

योग- 2 X प्रथम अंक X चौथा अंक

+ 2 x दूसरा अंक X तीसरा अंक

जैसे 1234 का द्वन्द्व योग ।

$$1 \times 4 \times 2 + 2 \times 3 \times 2$$

नियम:-

(i) इस विधि द्वारा किसी भी संख्या का वर्ग किया जा सकता है ।

- (ii) इस विधि से वर्ग करते समय संख्या में अंकों के समूह बनाये जाते हैं। जैसे संख्या में तीन अंक है तो

$$\text{समूह संख्या} = 2 \times \text{अंकों की संख्या} - 1 = 5$$

- (iii) प्रत्येक समूह 4l द्वन्द्व योग संकेत में दिये अनुसार ज्ञात कर लिखा जाता है।

- (iv) प्रत्येक खण्ड में एक अंक रखते हुए शेष अंकों को अगले खण्ड में स्थानान्तरण कर जोड़ते हैं।

$$\text{प्रयास कीजिए— (1) } (2y)^2 \quad (2) 36^2 \quad (2) 123^2$$

- बीजगणित में शीघ्र एवं शुद्ध हल करने की वैदिक गणितीय संभावनाएँ छिपी होती है।
- कक्षा 10 के बोर्ड परीक्षा पैटर्न को ध्यान में रखते हुए बीजगणित का एक अंक का प्रश्न आता है, जिसका विस्तृत विवरण दिया गया है।

### परावर्त्ययोजयेत

प्रथम विधि— पक्षांतरण तथा समायोजन। समाचार

- (i)  $ax + b = cx + d$  को मानक रूप में मानें तो।

$$x = \frac{d-b}{a-c}$$

उदाहरण—

$$3x + 2 = 4x + 5$$

$$x = \frac{5-2}{3-4}$$

$$x = \frac{2}{-1}$$

$$x = 3$$

प्रयास करें—

(i)  $5x + 4 = 3x + 8$

(ii)  $2x + 3 = x + 7$

(iii)  $3x + 1 = 5x - 4$

(ii)  $3x + 2 = x + 8$

यदि  $(x + a)(x + b) = (x + c)(x + d)$  मानक रूप हो तो।

$$x = \frac{cd - ab}{a6b - c - d} \text{ होगा।}$$

उदाहरण—

$$(x + 2)(x + 3) = (x + 4)(x + 5) \text{ में।}$$

$$a = 2, b = 3, C = 4, d = 5 \text{ है।}$$

अतः

$$\frac{cd - ab}{a6b - c - d}$$

$$= \frac{4 \times 5 - 2 \times 3}{2 + 3 - 4 - 5}$$

$$= \frac{20 - 6}{5 - 4 - 5}$$

या  $\frac{14}{-4}$

$$= -\frac{7}{2}$$

या  $-3.5$

**प्रयास करें—**

- (i)  $(x + 1)(x + 2) = (x + 3)(x + 5)$  (ii)  $(x + 1)(x + 2) = (x - 3)(x - 5)$   
(ii)  $(x + 3)(x + 4) = (x + 9)(x + 7)$  (iv)  $(x - 3)(x + 2) = (x + 3)(x + 5)$

**विधि—**

समीकरण का मानक रूप इस प्रकार है—

$$\frac{p}{ax + b} = \frac{q}{ax + d} \text{ हो तो } \frac{ax + b}{p} = \frac{cx + d}{q}$$

उदाहरण—3

$$\frac{4}{2x + 3} = \frac{5}{3x + 4}$$

में  $P = 4, q = 5$   $a = 2, b = 3, C = 3, d = 4$

रखने पर

$$x = \frac{dp - bq}{aq - cp}$$

$$= \frac{4 \times 4 - 3 \times 5}{2 \times 5 - 3 \times 4}$$

$$= \frac{16 - 15}{10 - 12}$$

$$= \frac{1}{-2}$$

या  $-\frac{1}{2}$

**प्रयास करें—**

- (i)  $\frac{1}{x + 3} = \frac{3}{3x + 2}$  (ii)  $\frac{3}{2x + 4} = \frac{4}{3x + 7}$   
(iii)  $\frac{1}{x - 1} = \frac{2}{x + 5}$  (ii)  $\frac{2}{3x + 4} = \frac{2}{x + 6}$

**सूत्र-शून्य साम्य समुच्चय:-**

‘समुच्चय परस्पर समान होने पर शून्य होता है।

- (1) यदि समीकरण के प्रत्येक पद  $x$  में एक सर्वनिष्ठ खण्ड है।

उदाहरण:-  $4x + 7x = 3x + 5x$  सभी में  $x$  है।

अतः  $x = 0$

उदाहरण-  $2(x + 1) = 3(x + 1)$  में प्रत्येक खण्ड में  $(x + 1)$

में एक सर्वनिष्ठ खण्ड है।

अतः  $x + 1 = 0$

$$x = -1$$

प्रयास करें:-  $4(x + 2) + 3(x + 2) = 2(x + 2)$

2. एक घातीय समीकरण के दोनों पक्षों में स्वतंत्र पद अर्थात् अचर पद समान हो तो चर का मान शून्य होता है।

उदाहरण-  $(x + 4) + (2x + 5) = 2(x + 3) + 3$

वाम पक्ष के स्वतंत्र  $4 + 5 = 9$

दक्षिण पद के स्वतंत्र पद  $= 6 + 3 = 9$  दोनों पर समान है। अतः  $x = 0$

प्रयास करें-

- (i)  $(2x + 7) + 3x + 4 = x + 8 + 2x + 3$

3. दोनों भिन्नों के अंश परस्पर समान हो तो दूरों का योग शून्य के बराबर रखते हैं।

उदाहरण-  $\frac{2}{2x+4} = \frac{3}{x+5} = 0$

$$= 2x + 4 + x + 5 = 0$$

$$= 3x + 9 = 0$$

$$= x = \frac{-9}{3}$$

$$= x = -3$$

प्रयास  $\frac{2}{3x+4} + \frac{2}{4x+3} = 0$

4. यदि समीकरण के दोनों पक्षों के अंशों का योग तथा उसके दोनों हरों का योग परस्पर समान हो या दोनों योग एक निश्चित अनुपात में हो तो किसी योग को शून्य के समान रखने पर समीकरण का हल एक मान मान ज्ञात होता है।

$$\frac{2x+4}{3x+5} = \frac{3x+2}{2x+1}$$

$$\text{अंशों का योग} - 2x + 4 + 3x + 2 = 5x + 6$$

$$\text{हरों का योग} - 3x + 5 + 2x + 1 = 5x + 6$$

दोनों योग समान है-

$$\text{अतः } 5x + 6 = 0$$

$$x = -6$$

$$x = \frac{5}{6}$$

$$\text{प्रयास करें- (i) } \frac{2x+2}{3x+7} = \frac{3x+6}{2x+1} \quad \text{(ii) } \frac{x+3}{2x+5} = \frac{3x+1}{2x-3}$$

यदि समीकरण के एक पक्ष को अंश व हर का अन्तर दूसरे पक्ष के अंश व हर के अन्तर के समान हो या दोनों अन्तर एक निश्चित अनुपात में से तो किसी भी अन्तर को शून्य के समान रखने पर चर राशि का एक मान ज्ञात होता है ।

$$\text{उदाहरण- } \frac{2x+2}{x+5} = \frac{3x+6}{2x+3}$$

$$\text{वाम पक्ष के अंश व हर में अन्तर } 2x + 8 - x - 5 = x + 3$$

$$\text{दक्षिण पक्ष के अंश व हर में अन्तर } 3x + 6 - 2x - 3 = x + 3$$

$$\text{दोनों समान है अतः } x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

$$\text{प्रयास कीजिए - (i) } \frac{3x+5}{2x+1} = \frac{5x+7}{4x+7}$$

$$\text{(ii) } \frac{2x+9}{x+4} = \frac{3x+7}{2x+2}$$

$$\text{(iii) } \frac{5x+7}{3x+4} = \frac{4x+9}{2x+6}$$

vi. यदि किसी समीकरण के प्रत्येक पक्ष में दो पद हो तथा पद का प्रत्येक अंश परस्पर समान हो और वाम पक्ष के हरों का योग, दक्षिण पक्ष के हरों के योग के समान हो तो इस योग को शून्य के बराबर रखने पर चर राशि का मान प्राप्त होता है ।

$$= \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+6}$$

$$\text{वाम पक्ष के हरों का योग- } x + 3 + x + 4 = 2x + 7$$

$$\text{दक्षिण पक्ष के हरों का योग- } x + 1 + x + 6 = 2x + 7$$

$$\text{दोनों योग समान है। अतः } 2x + 7 = 0$$

$$x = \frac{-7}{2}$$

प्रयास कीजिए-

$$(i) \quad \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3}$$

$$(ii) \quad \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+7} = \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+6}$$

भाज्य = भाजक  $\times$  भागफल + शेषफल

याद रखने हेतु *Trick*

$a=bq+r$  (ए बालक क्यो रोता है)



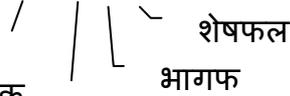
## अध्याय - 2 वास्तविक संख्याएँ

प्रमेय :- यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका

$$a = bq + r \quad \text{जहाँ } a \leq r < b$$

भा

भाजक



भागफल

$a$  और  $b$  दो धनात्मक पूर्णांक हैं।  $q$  व  $r$  अद्वितीय पूर्ण संख्याएँ हैं।

Note :- शेषफल भाजक के बराबर व बड़ा नहीं होना चाहिए।

$$\begin{array}{c} \text{भागफल} \\ \hline \text{भाजक} \overline{\text{भाज्य}} \\ \hline \text{शेषफल} \end{array} \quad b \overline{\text{a}} q \quad r$$

HCF उभयनिष्ठ अभाज्य  
गुणखंड की सबसे छोटी  
घात

Note :- बड़ी संख्या में छोटी संख्या का भाग देना है।

1: 81 और 237 का महत्तम समापवर्तक (HCF) यूक्लिड विभाजन विधि का प्रयोग कर ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{r} 81 \mid 237 \mid 2 \\ \underline{162} \\ 75 \mid 81 \mid 1 \\ \underline{75} \\ 6 \mid 75 \mid 12 \\ \underline{72} \\ \text{HCF} = 3 \mid 6 \mid 2 \\ \underline{6} \\ 0 = \text{शेषफल} \end{array}$$

यूक्लिड विभाजन विधि द्वारा

$$A = bq + r$$

$$237 = 81 \times 2 + 75$$

$$81 = 75 \times 1 + 6$$

$$75 = 6 \times 12 + 3$$

$$6 = 3 \times 2 + 0$$

HCF = अंतिम भाजक

$$\text{HCF} = 3$$

अभाज्य गुणनखंड विधि

भाजकता के नियम -

अभाज्य संख्याएँ 2, 3, 5, 7, 11, 13 आदि

- 2 से भाज्यता के नियम - ईकाई के स्थान पर सम संख्या (0, 2, 4, 6, 8) आदि आए तो उस संख्या में 2 का भाग देना है
- 3 से भाज्यता के नियम - संख्या के अंको का योग में 3 का भाग जाता है तो संख्या 3 से भाज्य है
- 5 से भाज्यता के नियम - ईकाई का अंक 0 या 5 होने पर 5 का भाग जाएगा

Q 2 अभाज्य गुणनखंड विधि द्वारा HCF व LCM ज्ञात करो

i) 24, 15 और 36

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

3	15
5	5
	1

2	36
2	18
3	9
3	3
	1

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times (3) = 2^3 \times 3^1$$

$$15 = (3) \times 5 = 5^1 \times 3^1$$

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times (3) = 2^2 \times 3^2$$

$$\text{HCF} = 3$$

$$\text{LCM} = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

$$= 360$$

$$\text{ल0स0 X म0स0} = \text{पहली संख्या X दूसरी संख्या}$$

$$\text{HCF X LCM} = \text{पहली संख्या X दूसरी संख्या}$$

$$4 \times 9696 = 96 \times 404$$

$$38784 = 38784$$

Q 3 युग्मों का महत्तम समापवर्तक (HCF) व (LCM) ज्ञात करो तथा सत्यापित करो की HCF X

LCM = पूर्णाकों का गुणनफल

हल :- 96 और 404 का

2	96	2	404
2	48	2	202
2	24		101
2	12		1
2	6		
3	3		
	1		

$$96 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^5 \times 3^1$$

$$404 = 2 \times 2 \times 101 = 2^2 \times 101$$

$$\text{HCF} = 2^2 = 4$$

$$\text{LCM} = 2^5 \times 3^1 \times 101$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 101$$

$$= 9696$$

Note : उत्तर की जांच

HCF का भाग सभी संख्याओं में पूरा पूरा जाता है।

LCM में सभी संख्याओं का भाग पूरा पूरा जाता है।

Q 4 HCF (90, 144) = 18 हो तो LCM (90, 144) ज्ञात करो

$$\text{HCF X LCM} = \text{पहली संख्या X दूसरी संख्या}$$

$$\text{LCM X 18} = 90 \times 144$$

$$\text{LCM} = 90 \times \frac{144}{18}$$

$$\text{LCM} = 720$$

Q 5 सिद्ध करो कि  $3\sqrt{2}$  एक अपरिमेय संख्या है।

मान लें कि  $3\sqrt{2}$  एक परिमेय संख्या है।

$$\text{अतः } 3\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

जहाँ  $a$  व  $b$  सहअभाज्य संख्याएँ हैं अर्थात्  $a, b$  में कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

$$\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$$

अपरिमेय

परिमेय

जो की विरोधाभास है। अतः  $3\sqrt{2}$  एक अपरिमेय संख्या है।

Q 6 सिद्ध करो की  $6+\sqrt{2}$  अपरिमेय संख्या है।

हल :- माना  $6+\sqrt{2}$  एक परिमेय संख्या है

चूँकि  $6+\sqrt{2} = \frac{a}{b}, b \neq 0$

जहाँ  $a$  व  $b$  सहअभाज्य संख्याएँ हैं।

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} - 6$$

$$\sqrt{2} = \frac{a-6b}{b}$$

अपरिमेय परिमेय

जो की विरोधाभास है

अतः  $6+\sqrt{2}$  एक अपरिमेय संख्या है।

Q 7 सिद्ध करो की  $\sqrt{2}$  अपरिमेय संख्या है।

हल :- माना  $\sqrt{2}$  एक परिमेय संख्या है

चूँकि  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}, b \neq 0$

जहाँ  $a$  व  $b$  सहअभाज्य संख्याएँ हैं अर्थात्  $a, b$  में कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

वर्ग करने पर

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$2b^2 = a^2 \quad - (1)$$

चूँकि  $2b^2$ , 2 से विभाज्य है अतः  $a^2$  भी 2 से विभाज्य होगा

माना  $a = 2c$  -- (2) जहाँ  $c$  एक पूर्णांक है।

सामी. (1) व (2) से

$$2b^2 = (2c)^2$$

$$2b^2 = 4c^2$$

$$b^2 = 2c^2$$

चूँकि  $2c^2$ , 2 से विभाज्य है अतः  $b^2$  भी 2 से विभाज्य होगा

अतः  $a$  व  $b$  का उभयनिष्ठ गुणनखंड 2 है जो की हमारे कथन का विरोधाभास है।

अतः  $\sqrt{2}$  अपरिमेय संख्या है।

सांत व असांत प्रसार की पहचान --

- |  |              |
|--|--------------|
| a) $\frac{1}{2} = 0.5$                                   | सांत प्रसार  |
| b) $\frac{1}{3} = 0.333 \dots$                           | असांत प्रसार |
| c) $\frac{1}{4} = \frac{1}{2 \times 2} = 0.25$           | सांत प्रसार  |
| d) $\frac{1}{5} = 0.2$                                   | सांत प्रसार  |
| e) $\frac{1}{6} = \frac{1}{2 \times 3} = 0.1666\dots$    | असांत प्रसार |
| f) $\frac{1}{7} = 0.142857142857\dots$                   | असांत प्रसार |
| g) $\frac{1}{8} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = 0.125$ | सांत प्रसार  |
| h) $\frac{1}{9} = \frac{1}{3 \times 3} = 0.1111\dots$    | असांत प्रसार |

$$i) \frac{1}{10} = \frac{1}{2 \times 5} = 0.1 \quad \text{सांत प्रसार}$$

Note - यदि परिमेय संख्या का हर  $2^n \times 5^m$  के रूप का है तो दशमलव प्रसार सांत होगा अन्यथा प्रसार असांत होगा।

- जिन परिमेय संख्याओं का दशमलव प्रसार सांत होता है उनके हर  $2^n \times 5^m$  के रूप में लिखे जा सकते हैं जहाँ  $m$  व  $n$  कोई ऋणोत्तर पूर्णांक हैं।

Q 8 लम्बी विभाजन विधि के बिना बताइये कि निम्न परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार सांत है या असांत आवर्ती है

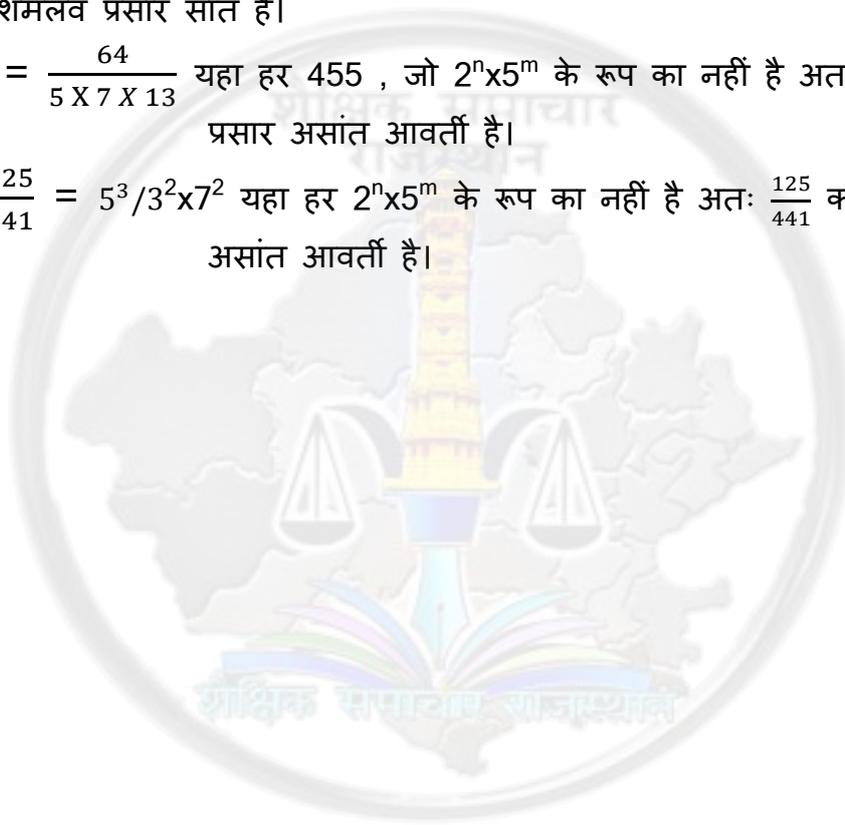
$$i) \frac{17}{8} \quad ii) \frac{64}{455} \quad iii) \frac{125}{441}$$

$$\text{हल } i) \frac{17}{8} = 17/2^3 \times 5^0$$

यहाँ परिमेय संख्याओं का हर 8,  $2^3 \times 5^0$  है जो  $2^n \times 5^m$  के रूप का है अतः  $\frac{17}{8}$  का दशमलव प्रसार सांत है।

$$ii) \frac{64}{455} = \frac{64}{5 \times 7 \times 13} \text{ यहाँ हर 455, जो } 2^n \times 5^m \text{ के रूप का नहीं है अतः } \frac{64}{455} \text{ का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती है।}$$

$$iii) \frac{125}{441} = 5^3/3^2 \times 7^2 \text{ यहाँ हर } 2^n \times 5^m \text{ के रूप का नहीं है अतः } \frac{125}{441} \text{ का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती है।}$$

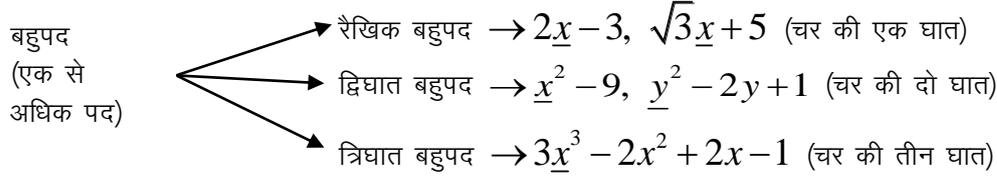


## अध्याय – 3

## बहुपद

इस अध्याय में से 3 अंक प्रश्न निम्नानुसार संभावित हैं:-

1. द्विघात बहुपद के शून्यकों एवं गुणांकों में सम्बन्ध पर आधारित है। 2. विभाजन एल्गोरिथम पर आधारित। 3. द्विघात समीकरण हल करना। 4. LCM तथा HCF पर आधारित।



बहुपद की जितनी अधिकतम घात होगी बहुपद में उतने ही शून्यक होंगे।

शून्यक – चर का वह मान जो बहुपद को शून्य कर दें।

उदाहरण –  $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$  में  $x = 1$  रखने पर

$$\begin{aligned} f(1) &= 2(1)^2 - 8(1) + 6 \\ &= 2 - 8 + 6 \\ &= 8 - 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

इसी प्रकार  $x = 3$  रखने पर

$$\begin{aligned} f(3) &= 2(3)^2 - 8(3) + 6 \\ &= 2(9) - 24 + 6 \\ &= 18 - 24 + 6 \\ &= 24 - 24 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore x = 1$  तथा  $x = 3$  पर बहुपद के मान 0 प्राप्त होते हैं।

अतः 1 और 3 द्विघात बहुपद के शून्यक होंगे।

द्विघात बहुपद में अधिकतम दो शून्यक होंगे।

द्विघात बहुपद का मानक रूप  $f(x) = ax^2 + bx + c$

$a = x^2$  का गुणांक,  $b = x$  का गुणांक,  $c =$  अचर पद

बहुपद के शून्यक ज्ञात करना एवं शून्यकों एवं गुणांकों में सम्बन्ध की सत्यता की जाँच करना—

यदि द्विघात बहुपद के शून्यकों को  $\alpha$  (एल्फा) तथा  $\beta$  (बीटा) से दर्शाया जाय तो —

$$\text{शून्यकों का योग } \alpha + \beta = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = -\frac{b}{a}$$

$$\text{तथा शून्यकों का गुणनफल } \alpha \times \beta = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{c}{a}$$

उदाहरण – द्विघात बहुपद  $x^2 - 2x - 8 = 0$  के शून्यक ज्ञात कीजिये और शून्यकों एवं गुणांकों के बीच सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिये।

$$\text{माना } f(x) = x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - (4 - 2)x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 2x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 4) + 2(x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\text{या तो } x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$\text{या } x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

अतः बहुपद के शून्यक 4 और -2 होंगे।

सत्यता की जाँच

$$\text{माना } \alpha = 4 \text{ और } \beta = -2$$

$$\text{तब शून्यकों का योग } \alpha + \beta = 4 + (-2) = 4 - 2 = 2$$

$$\text{शून्यकों का योग } = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = \frac{2}{1} = 2 \text{ दोनों बराबर है।}$$

$$\text{यहाँ } a = 1, b = -2, c = -8$$

$$a \times c = 1 \times -8 = -8$$

$$8 = 1 \times 8 \text{ सम्भव नहीं}$$

$$[\because 1 + 8 = 9] [8 - 1 = 7]$$

$$8 = 2 \times 4 \text{ (संभव)}$$

$$\therefore -4 + 2 = -2 = b$$

इसी प्रकार शून्यकों का गुणफल  $\alpha \times \beta = 4 \times -2 = -8$

तथा शून्यकों का गुणनफल  $= \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{c}{a} = \frac{-8}{1} = -8$  दोनों बराबर है।

अतः शून्यकों एवं गुणांकों में सम्बन्ध सत्य है।

शून्यकों का योग एवं गुणनफल दिये जाने पर बहुपद ज्ञात करना –  
(इस प्रकार के प्रश्न हल करने के लिये सूत्र का प्रयोग सुविधाजनक रहता है।)

माना  $\alpha$  तथा  $\beta$  द्विघात बहुपद  $f(x) = ax^2 + bx + c$  के शून्यक हैं।

तब  $(x - \alpha)$  तथा  $(x - \beta)$  बहुपद के गुणनखण्ड होंगे।

तब स्थिरांक  $K$  के लिये  $f(x) = K(x - \alpha)(x - \beta)$

अर्थात्  $f(x) = K[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$

उदाहरण : एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिये जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः  $\frac{1}{4}$  और  $-1$  है।

माना द्विघात बहुपद  $f(x) = ax^2 + bx + c$  के शून्यक  $\alpha$  और  $\beta$  हैं।

तब प्रश्नानुसार  $\alpha + \beta = \frac{1}{4}$  तथा  $\alpha\beta = -1$

$$f(x) = K[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$$

$$K \left[ x^2 - \left( \frac{1}{4} \right) x + (-1) \right]$$

$$K \left[ x^2 - \frac{x}{4} - 1 \right]$$

$$K \left[ \frac{4x^2 - x - 4}{4} \right]$$

$$= \frac{K}{4} [4x^2 - x - 4]$$

अतः अभीष्ट बहुपद  $4x^2 - x - 4$  होगा।

विभाजन एल्गोरिथम –

$$\begin{array}{r} \text{भाजक} \rightarrow 5 \quad 8 \leftarrow \text{भाज्य} \\ \underline{\phantom{0}5} \phantom{0} \\ \phantom{0}3 \leftarrow \text{शेषफल} \end{array}$$

$$8 = 5 \times 1 + 3$$

भाज्य = भाजक  $\times$  भागफल + शेषफल

बहुपद  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$  को बहुपद  $g(x) = x + 2$  से विभाजन एल्गोरिथम विधि से विभाजित करना।

$$x + 2 \quad x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \quad (x^2 - 8x + 27$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 \\ \hline -8x^2 + 11x \\ -8x^2 - 16x \\ \hline 27x - 6 \\ 27x + 54 \\ \hline -60 \end{array}$$

इसे निम्न रूप में भी दर्शाया  $r(x)$  जा सकता है।

$$f(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$$

क्रियाविधि

$$(1) \quad \frac{x^3}{x} = x^2$$

$$(x + 2)x^2 = x^3 + 2x^2$$

$$(2) \quad \frac{-8x^2}{x} = -8x$$

$$(x+2)x - 8x = -8x^2 - 16x$$

$$(3) \quad \frac{27x}{x} = 27$$

$$(x+2) \times 27 = 27x + 54$$

बहुपद  $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5$  को  $g(x) = x^2 + 1 - x$  से भाग देने के लिये  $p(x) = x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 4x + 5$  एवं  $g(x) = x^2 - x + 1$  के रूप में लिखकर भाग क्रिया की जा सकती है।

विशेष –

- (1) भाग क्रिया करने से पूर्व बहुपद की (भाज्य एवं भाजक को) चर राशि को घटती हुई घातों के क्रम में लिखते हैं अर्थात् बहुपद को मानक रूप में लिखते हैं।  
 (2) भाग क्रिया में शेषफल 0 प्राप्त होने पर भाजक  $g(x)$  बहुपद  $f(x)$  का एक गुणखण्ड होता है।

द्विघात समीकरण – यदि कोई द्विघात बहुपद  $f(x) = ax^2 + bx + c$  हो और उनका मान 0 के बराबर हो तो वह द्विघात समीकरण कहलाता है।

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = 0$$

विशेष : द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करने की प्रक्रिया को ही उस समीकरण को हल करना कहते हैं।

अर्थात्  $ax^2 + bx + c = 0$  (यदि द्विघात समीकरण का मानक रूप कहलाता है)

द्विघात समीकरण के मूल – द्विघात समीकरण की अधिकतम घातांक 2 होती है। अतः इसके अधिकतम दो मूल हो सकते हैं। मूलों की प्रकृति –

- (1)  $b^2 - 4ac > 0$  दो असमान एवं वास्तविक मूल  
 (2)  $b^2 - 4ac = 0$  दो समान एवं वास्तविक मूल  
 (3)  $b^2 - 4ac < 0$  कोई वास्तविक मूल नहीं होता (काल्पनिक मूल)

**द्विघात समीकरण हल करने की विधियाँ–**

- (1) गुणखण्ड विधि  
 (2) पूर्ण वर्ग बनाकर  
 (3) श्रीधर आचार्य द्विघाती सूत्र द्वारा  
 इन विधियों में श्रीधर आचार्य द्विघाती सूत्र विधि सबसे सुगम विधि है।  
 श्रीधर आचार्य द्विघाती सूत्र–

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

उदाहरण – निम्न द्विघात समीकरण के मूल, यदि उनका अस्तित्व हो, तो श्रीधर आचार्य विधि द्वारा द्विघाती सूत्र का उपयोग करके ज्ञात कीजिये।

$$9x^2 + 7x - 2 = 0$$

मानक रूप  $ax^2 + bx + c = 0$  से तुलना करने पर

$$a = 9, b = 7, c = -2$$

$$D = b^2 - 4ac = (7)^2 - 4(9)(-2)$$

$$= 49 + 72$$

$$= 121$$

$\therefore b^2 - 4ac > 0 \quad \therefore$  समीकरण के दो असमान एवं वास्तविक मूल होंगे।

द्विघाती सूत्र –  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  में मान रखने पर

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{2 \times 9}$$

$$x = \frac{-7 \pm 11}{18}$$

+ चिह्न लेने पर  $x = \frac{-7 + 11}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$

– चिह्न लेने पर  $x = \frac{-7 - 11}{18} = \frac{-18}{18} = -1$

अतः समीकरण के मूल  $\frac{2}{9}$  एवं  $-1$  होंगे।

LCM एवं HCF (लघुत्तम समापवर्त्य एवं महत्तम समापवर्तक)

LCM (लघुत्तम समापवर्त्य) – प्रत्येक प्रकार के गुणनखण्ड में अधिकतम घात वाले गुणनखण्डों का गुणनफल

HCF (महत्तम समापवर्तक) – उभयनिष्ठ गुणनखण्डों में न्यूनतम घात वाले गुणनखण्डों का गुणनफल

LCM एवं HCF में सम्बन्ध –

$$\text{LCM} \times \text{HCF} = \text{प्रथम व्यंजक} \times \text{द्वितीय व्यंजक}$$

$$(1) \quad (2) \quad (3) \quad (4)$$

जहाँ (1) व (2) साथी है, (3) व (4) साथी है।

उदाहरण – निम्न व्यंजकों का LCM तथा HCF ज्ञात कीजिये।

$$x^2 - 4x + 3, \quad x^2 - 5x + 6$$

$$\begin{aligned} \text{माना} \quad U(x) &= x^2 - 4x + 3 \\ &= x^2 - 3x - x + 3 \\ &= x(x-3) - 1(x-3) \\ &= (x-3)(x-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{तथा} \quad V(x) &= x^2 - 5x + 6 \\ &= x^2 - 3x - 2x + 6 \\ &= x(x-3) - 2(x-3) \\ &= (x-3)(x-2) \end{aligned}$$

LCM = प्रत्येक प्रकार के गुणनखण्ड में अधिकतम घात वाले गुणनखण्डों का गुणनफल  
(x-1)(x-2)(x-3)

$$\begin{aligned} \text{अतः} \quad \text{LCM} &= (x-1)(x-2)(x-3) \\ &= (x-3) \end{aligned}$$

$$\text{अतः} \quad \text{HCF} = (x-3)$$

विशेष : द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करने की प्रक्रिया को ही उस समीकरण को हल करना कहते हैं।

**LCM एवं HCF (लघुत्तम समापवर्त्य एवं महत्तम समापवर्तक)**

LCM (लघुत्तम समापवर्त्य) – प्रत्येक प्रकार के गुणनखण्ड में अधिकतम घात वाले गुणनखण्डों का गुणनफल

HCF (महत्तम समापवर्तक) – उभयनिष्ठ गुणनखण्डों में न्यूनतम घात वाले गुणनखण्डों का गुणनफल

LCM एवं HCF में सम्बन्ध –

$$\text{LCM} \times \text{HCF} = \text{प्रथम व्यंजक} \times \text{द्वितीय व्यंजक}$$

$$(1) \quad (2) \quad (3) \quad (4)$$

जहाँ (1) व (2) साथी है, (3) व (4) साथी है।

उदाहरण – निम्न व्यंजकों का LCM तथा HCF ज्ञात कीजिये।

$$x^2 - 4x + 3, \quad x^2 - 5x + 6$$

$$\begin{aligned} \text{प्रथम व्यंजक} \quad &= x^2 - 4x + 3 \\ &= x^2 - 3x - x + 3 \\ &= x(x-3) - 1(x-3) \\ &= (x-3)(x-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{द्वितीय व्यंजक} \quad &= x^2 - 5x + 6 \\ &= x^2 - 3x - 2x + 6 \\ &= x(x-3) - 2(x-3) \\ &= (x-3)(x-2) \end{aligned}$$

$$x^2 - 4x + 3,$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$= x^2 - 5x + 6$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline \end{array}$$

HCF = दोनों व्यंजकों में उभयनिष्ठ गुणनखण्ड (x-3) है

$$\therefore \text{HCF} = (x-3)$$

LCM = प्रत्येक प्रकार के गुणनखण्ड में अधिकतम घात वाले गुणनखण्डों का गुणनफल

$$(x-1), (x-2) \text{ एवं } (x-3) \text{ हैं।}$$

$$\text{LCM} = (x-1)(x-2)(x-3)$$

उदाहरण : दो व्यंजकों का गुणनफल  $(x-7)(x^2+8x+12)$  है। यदि इन व्यंजकों का महत्तम समापवर्तक (HCF), (x+6) हो तो इनका (LCM) लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिये।

LCM x HCF प्रथम व्यंजक x द्वितीय व्यंजक (व्यंजकों का गुणनफल)

$$LCM = \frac{\text{प्रथम व्यंजकों} \times \text{द्वितीय व्यंजक}}{HCF}$$

$$LCM = \frac{(x-7)(x^2+8x+12)}{(x+6)}$$

$$LCM = \frac{(x-7)(x^2+6x+2x+12)}{(x+6)}$$

$$LCM = \frac{(x-7)[x(x+6)+2(x+6)]}{(x+6)}$$

$$LCM = \frac{(x-7)\cancel{(x+6)}(x+2)}{\cancel{(x+6)}}$$

$$LCM = (x-7)(x+2)$$

$$LCM = x^2 - 7x + 2x - 14$$

$$LCM = x^2 - 5x - 14$$

अतः  $LCM = x^2 - 5x - 14$

विशेष –

जो ज्ञात करना है उसके साथी का भाग दूसरे पक्ष में लगेगा।

$$x^2 + 8x + 12$$

$$\begin{array}{cc} 12 & 1 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{cc} 6 & 2 \end{array}}$$

$$\begin{array}{cc} 4 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 2 & 6 \end{array}$$

$$x - 7$$

$$x + 2$$

$$\hline +2x - 14$$

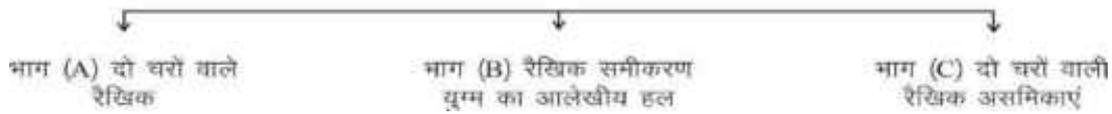
$$x^2 - 7x$$

$$\hline x^2 - 5x - 14$$



# दो चरों वाले रैखिक समीकरण एवं असमिकाएं

अंक भार – 6



दो चरों वाले रेखीय समीकरण

$$2x + 3y + 4 = 0$$

$$ax + by + c = 0 \text{ (मानक समीकरण)}$$

दोनों समीकरणों की तुलना करने पर

यहाँ  $a, x$  का गुणांक  $b, y$  का गुणांक  $c$ , अचर पद है।

$$a = 2, \quad b = 3, \quad c = 4$$

$$\text{इसी तरह} \quad 3x + 5y - 6 = 0$$

$$ax + by + c = 0 \quad \therefore a = 3, \quad b = 5, \quad c = -6$$

यदि दो समीकरण एक साथ दिए गए हैं, तो

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ (प्रथम मानक समीकरण)}$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \text{ (द्वितीय मानक समीकरण)}$$

यदि दो समीकरण दी गई है तो

$$5x + 6y - 7 = 0$$

$$\text{तथा} \quad 8x + 7y - 3 = 0$$

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$a_1 = 5, \quad b_1 = 6, \quad c_1 = -7$$

$$a_2 = 8, \quad b_2 = 7, \quad c_2 = -3$$

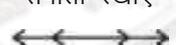
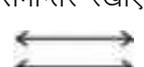
## भाग (A)

यदि दो चरों वाले रैखिक समीकरण दिए गए हैं।

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$\text{तथा} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

दोनों रेखाएं तीन प्रकार से प्रदर्शित हो सकती हैं। (प्रकृति)

क्र. सं.	गुणांकों की तुलना (अनुपात)	बीज गणितीय निरूपण	ग्राफीय निरूपण	उदाहरण
1.	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ युग्म संगत	अद्वितीय (एक हल होगा)	प्रतिच्छेदी रेखाएं 	$2x + 3y = 5$ $5x + 7y = 15$ $\frac{2}{5} \neq \frac{3}{7}$
2.	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ युग्म आश्रित संगत	अपरिमित रूप से अनेक हल	संपाती रेखाएं 	$2x + 3y - 9 = 0$ $4x + 6y - 18 = 0$ $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{-9}{-18}$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
3.	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ असंगत	कोई हल नहीं	समान्तर रेखाएं 	$x + 2y - 4 = 0$ $2x + 4y - 12 = 0$ $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-4}{-12}$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$

सारणी बनाना (निश्चित क्रम को जानकर)

(i)

		-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
x	1	0	-1	-	-3	-4	-	-6	
y	0	1	2	3	4	-	6	-	
		+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

$$\begin{aligned} x &= 1 - y \\ y &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 1 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

(ii)  $x - y = 3$

x	-2	-	0	1	2	-	4
y	-	-1	2	5	8	11	-

$x = 3 + y$

यहाँ आप देख रहे हैं कि  $x$  व  $y$  का मान  $+1$  बढ़ रहा है।

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 1 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

(iii)  $y = 3x + 2$

0	1	2	x	3	4	5	-	7	-	9
-3	-2	-1	y	0	1	2	3	-	5	-

यहाँ  $x$  में  $+1$  व  $y$  में  $+3$  बढ़ रहा है।

**भाग (B)**

(i) अद्वितीय हल पर आधारित समीकरणों का ग्राफीय विधि से हल।

प्रश्न : समीकरणों  $x - y + 1 = 0$  और  $3x + 2y + 12 = 0$  का ग्राफ खींचिए।  $x$  - अक्ष और इन रेखाओं से बने त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

$x - y + 1 = 0$

$x = -1 + y$

$y = 0$

$x = -1$

$3x + 2y - 12 = 0$

$3x = 12 - 2y$  (पक्षान्तरण करने पर)

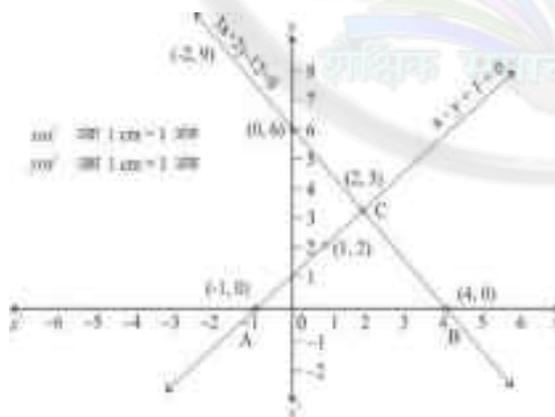
$y = 0$  रखने पर

$3x = 12$

$x = \frac{12}{3} = 4$

1	x	-1	0	1	2
1	y	0	1	2	3

-2	x	4	2	0	-2
3	y	0	3	6	9



त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक

A (-1, 0)

B (4, 0)

C (2, 3)

असमिका का संगत क्षेत्र ज्ञात करने की विधि :-

- दी गई असमिका के संगत रेखा का आलेख बनाइए।
- यदि असमिका में बराबर का चिह्न साथ में है तो गहरी रेखा बनाएं।
- यदि असमिका में बराबर का चिह्न नहीं है तो खण्डित रेखा (---) बनाएँ।
- यह आलेख तल को तीन भागों में विभाजित करता है।
  - आलेख के बायीं ओर का तल

- (2) आलेख के दांयी ओर का तल  
 (3) आलेख पर स्थित बिन्दु  
 (v) उपर्युक्त हल क्षेत्र ज्ञात करने के लिए असमिका में ऐसा बिन्दु रखे जो बनाए गए आलेख पर नहीं हो।  
 (vi) यदि रेखा मूल बिन्दु से नहीं गुजरती है, तो मूल बिन्दु असमिका में रखे।  
 (vi) यदि मूल बिन्दु असमिका को सन्तुष्ट करता है तो मूल बिन्दु की ओर का क्षेत्र हल क्षेत्र होगा अन्यथा दूसरी ओर का क्षेत्र हल क्षेत्र होगा।

उदाहरण :  $2x+3y \geq 3$  का समुच्चय को छायांकित कीजिए।

हल : (i)  $2x+3y \geq 3$  के संगत रेखा  $2x+3y=3$  का आलेख बनाएंगे।

$$2x+3y=3$$

$$3y=3-2x$$

$$y=\frac{3-2x}{3}$$

x	0	3	6
y	1	-1	-3

(ii) असमिका 2.

$$2(0)+3(0) \geq 3$$

$$0 \geq 3 \text{ जो कि असत्य है। अतः मूल बिन्दु हल क्षेत्र में न}$$

असमिकाओं को हल करना।

$$x+y > 3$$

दिए गए समीकरण में यदि  $y=0$  है तो

$$x+0 > 3$$

$$x > 3$$

अतः दी गई समीकरण जहाँ  $y=0$ ,  $y$ - अक्ष के समान्तर एक रेखा होगी।

$$x+y < 2$$

यदि  $x=0$  है तो

$$0+y < 2$$

अतः दी गई समीकरण जहाँ  $x=0$  है  $x$ - अक्ष के समान्तर एक रेखा होगी।

### भाग (C)

दो चरों वाली रैखिक असमिकाएं।

असमिकाओं पर आधारित 3 तरह के ग्राफ हो सकते हैं।

**type (i)** इस प्रकार के ग्राफ  $x$  तथा  $y$  अक्षों के समान्तर बनते हैं।

प्रश्न (1)  $x \geq 2$

ग्राफ बनाते समय  $x=2$  पर  $y$  अक्ष के समान्तर एक रेखा खींचनी है।

ग्राफ में  $x$  व  $y$  के स्थान पर 0 रखते हैं। यदि कथन सत्य है तो छायांकित भाग मूल बिन्दु की तरफ होगा।

और यदि कथन असत्य है तो छायांकित भाग मूल बिन्दु की दिशा के विपरित होगा।

$0 \geq 2$  (कथन असत्य है अतः छायांकित भाग मूल बिन्दु से विपरित दिशा में होगा)

प्रश्न (2)  $y \geq -4$

$$0 \geq -4$$

(सत्य)

$y=4$  पर जाकर अक्ष के समान्तर रेखा खींचना तथा मूल बिन्दु की तरफ छायांकित भाग होगा।

**type (ii)** इस प्रकार के ग्राफ रेखांक समीकरण के रूप में होते हैं।

$$(1) \quad 2x+3y \leq 12$$

इस प्रकार के समीकरणों को हल करते समय  $2x+3y=12$  लेकर सारणी बनाई जाती है तथा ग्राफ

खींचा जाता है।

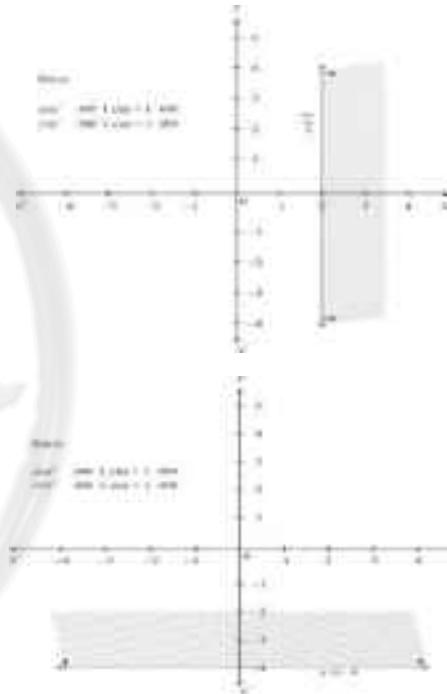
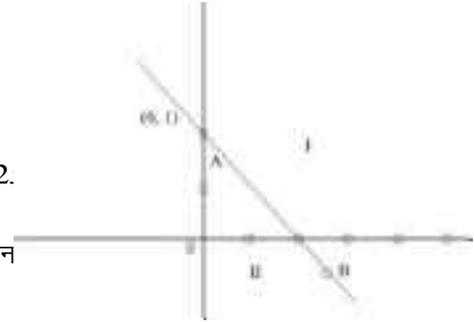
$$2x+3y=12$$

$$2x=12-3y$$

-3		x	6	3	0
2		y	0	2	4

$$y=0$$

$$x=6$$



अब  $2x+3y \leq 12$  समीकरण में  $x=0$  तथा  $y=0$  रखते हैं।

$$0+0 \leq 12$$

$$0 \leq 12 \text{ (कथन सत्य है।)}$$

अतः छायांकित भाग मूल बिन्दु की दिशा में होगा।

type (iii) मोड (Mode) पर आधारित ग्राफ को हल करना।

प्रश्न :  $|x-y| \geq 1$

इस प्रकार के समीकरणों को हल करते समय दो समीकरण ली जाती हैं।

$$x-y \geq 1$$

$$x-y \leq 1$$

संख्या तथा चिह्न दोनों समान लिए जाते हैं।

संख्या तथा चिह्न उलट दिए जाते हैं।

$\geq$  चिह्न  $\leq$  में बदलता है।

1 संख्या  $-1$  में बदलती है।

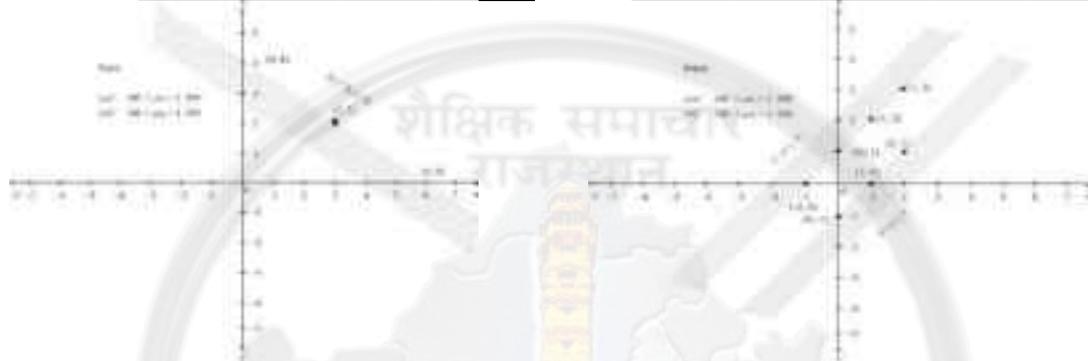
अब दोनों समीकरणों को सारणी बनाकर ग्राफ पर अंकित कर दिया जाता है।

$$x-y=1$$

$x$	1	0	2
$y$	0	-1	1

$$x-y=-1$$

$x$	-1	0	1	2
$y$	0	1	2	3



$$x-y \geq 1$$

$x$  तथा  $y$  की जगह 0 रखते हैं।

$$0-0 \geq 1$$

$$0 \geq 1 \text{ (असत्य)}$$

अतः छायांकित भाग मूल बिन्दु से विपरीत दिशा में होगा।

$$x-y \leq 1$$

$$0-0 \leq 1$$

$$0 \leq 1$$

(असत्य)

अतः छायांकित भाग मूल बिन्दु से विपरीत दिशा में होगा।

## अध्याय – 5

### समान्तर श्रेणी (A.P.)

प्रश्न आयेगा अंक भार – 3

समान्तर श्रेणी की पहचान –  
निम्न श्रेणियों को ध्यान से देखे –

- 1) 1, 2, 3, 4, 5, .....
- 2) 3, 5, 7, 9, 11, .....
- 3) 10, 5, 0, -5, .....
- 4) -36, -32, -28, -24 .....
- 5)  $2\frac{1}{2}$ , 5,  $7\frac{1}{2}$ , 10 .....

उपरोक्त श्रेणियों को देखने से पता चलता है कि इन सभी श्रेणियों में पदों को अन्तर समान है (अन्तर धनात्मक अथवा ऋणात्मक हो सकता है।)

जैसा कि श्रेणी 1) में पदों का अन्तर

$$2 - 1 = 1, \quad 3 - 2 = 1, \quad 4 - 3 = 1, \quad 5 - 4 = 1$$

श्रेणी 2) में पदों का अन्तर

$$5 - 3 = 2, \quad 7 - 5 = 2, \quad 9 - 7 = 2, \quad 11 - 9 = 2$$

श्रेणी 3) में पदों का अन्तर

$$5 - 10 = -5, \quad 0 - 5 = -5, \quad -5 - 0 = -5$$

श्रेणी 4) में पदों का अन्तर

$$-32 - (-36) = 4, \quad -28 - (-32) = 4, \quad -24 - (-28) = 4$$

श्रेणी 5) में पदों का अन्तर

$$5 - 2\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}, \quad 7\frac{1}{2} - 5 = 2\frac{1}{2}, \quad 10 - 7\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$$

अतः इस प्रकार की श्रेणियाँ समान्तर श्रेणी कहलाती हैं।

समान्तर श्रेणी के प्रथम पद को 'a' से बताया जाता है।

समान्तर श्रेणी के पदों के अन्तर को सार्वअन्तर (d) कहते हैं। बढ़ती हुई श्रेणी में d का मान सदैव धनात्मक व घटती हुई श्रेणी में d सदैव ऋणात्मक होता है।

समान्तर श्रेणी का मानक रूप –

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n - 1)d$$

उदाहरण 1— एक समान्तर श्रेणी का प्रथम पद 4 व सार्वअन्तर 3 हो तो श्रेणी के प्रथम चार पद लिखिए –

हल – प्रथम चार पद  $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$

$$= 4, \quad 4 + 3 = 7, \quad 7 + 3 = 10, \quad 10 + 3 = 13$$

$$= 4, 7, 10, 13$$

समान्तर श्रेणी का n वॉ पद ज्ञात करना –

$$a_n = a + (n - 1)d \text{ यहां } a_n = n \text{ वॉ पद है।}$$

उदाहरण 2— श्रेणी 2, 5, 8 ..... का 11 वॉ पद ज्ञात करो –

हल – दी गई श्रेणी में  $a = 2, d = 3, n = 11$

$$\text{सूत्र } a_n = a + (n - 1)d$$

$$a_n = 2 + (11 - 1) \times 3$$

$$a_n = 2 + 10 \times 3$$

$$= 32$$

उदाहरण 3— A.P. 21, 18, 15 ..... का कौनसा पद - 81 है।

हल – दी गई श्रेणी में  $a = 21, d = -3, a_n = -81, n = ?$

$$a_n = a + (n - 1)d$$

$$-81 = 21 + (n - 1) \times (-3)$$

$$-81 - 21 = -3n + 3$$

$$3n = 3 + 81 + 21$$

$$3n = 105$$

$$n = \frac{105}{3} = 35$$

नोट –  $n$  का मान सदैव एक पूर्ण संख्या होगी।

उदाहरण 4– A.P. निर्धारित कीजिए जिसका तीसरा पद 5 व सातवाँ पद 9 है।

हल – श्रेणी का तीसरा पद  $a + 2d = 5$  ..... (i)

श्रेणी का सातवाँ पद  $a + 6d = 9$  ..... (ii)

समी. (i) व (ii) को घटाने पर

$$a + 6d = 9$$

$$a + 2d = 5$$

$$4d = 4 \rightarrow d = 1$$

$d$  का मान (i) में रखने पर  $a + 2 \times 1 = 5$

$$a = 5 - 2 = 3$$

समान्तर श्रेणी 3, 4, 5, 6 .....

उदाहरण 5– श्रेणी 3, 8, 11 ..... 253 में अंतिम से 20 वॉ पद ज्ञात कीजिए।

हल – इस प्रकार के प्रश्नों में अंतिम पद को प्रथम पद मान ले तथा  $d$  के मान को भी चिन्ह बदले।

$a = 253$ ,  $d = 5$  है चिन्ह बदलने पर  $-5$  होगा,  $n = 20$

$$a_n = a + (n - 1) d$$

$$= 253 + (20 - 1) (-5)$$

$$= 253 + 19 (-5)$$

$$= 253 - 95$$

$$= 158$$

उदाहरण 6– 10 और 250 के बीच में 4 के गुणज कितने हैं।

हल – श्रेणी 12, 16, 20 ..... 248

$a = 12$ ,  $d = 4$ ,  $a_n = 248$ ,  $n = ?$

$$a_n = a + (n - 1) d$$

$$248 - 12 + (n - 1) \times 4$$

$$248 - 12 = (n - 1) \times 4$$

$$\frac{236}{4} = n - 1$$

$$n - 1 = 59$$

$$n = 59 + 1$$

$$n = 60$$

समान्तर श्रेणी के पदों का योगफल ज्ञात करना –

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d]$$

$$S_n = \frac{n}{2} [a + l]$$

$S_n = n$  पदों का योग,  $l =$  श्रेणी का अंतिम पद होता है।

उदाहरण 7– समान्तर श्रेणी 2, 7, 12 ..... के 10 पदों का योगफल ज्ञात करो।

हल –  $a = 2$ ,  $d = 5$ ,  $n = 10$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d]$$

$$= \frac{10}{2} [2 \times 2 + (10 - 1) \times 5]$$

$$= 5 [4 + 9 \times 5]$$

$$= 5 \times 49$$

$$= 245$$

उदाहरण 8– 636 योग प्राप्त करने के लिए A.P. 9, 17, 25 ..... के कितने पद लेने चाहिए ?

हल –  $S_n = 636$ ,  $a = 9$ ,  $d = 8$ ,  $n = ?$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) d]$$

$$636 = \frac{n}{2} [2 \times 9 + (n-1) \times 8]$$

$$636 = \frac{n}{2} \times 2 [9 + 4n - 4]$$

$$636 = n [5 + 4n]$$

$$636 = 4n^2 + 5n$$

$$4n^2 + 5n - 636 = 0$$

$$4n^2 + 53n - 48n - 636 = 0$$

$$n(4n + 53) - 12(4n + 53) = 0$$

$$(n - 12)(4n + 53) = 0$$

$$n - 12 = 0 \quad \quad \quad 4n + 53 = 0$$

$$n = 12 \quad \quad \quad n = -\frac{53}{4}$$

$n$  केवल पूर्ण संख्या होती है।

उदाहरण 9— प्रथम 40 घन पूर्णाकों का योग ज्ञात करो जो कि 6 से विभाज्य है।

हल — श्रेणी 6, 12, 18 ..... जहाँ  $a = 6$ ,  $d = 6$ ,  $n = 40$ ,  $S_n = ?$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$= \frac{40}{2} [2 \times 6 + (40-1) \times 6]$$

$$= 20 [12 + 39 \times 6]$$

$$= 20 \times 246$$

$$= 4920$$

प्रथम  $n$  प्राकृत संख्याओं का योग ज्ञात करना —  $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

उदाहरण 10 — 1 से 100 तक की प्राकृत संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{100 \times (100+1)}{2}$$

$$= 50 \times 101$$

$$= 5050$$

उदाहरण 11 — 101 से 200 तक की प्राकृत संख्याओं का योग ज्ञात करो —

हल — 1 से 100 तक की संख्याओं का योग

$$S_{100} = \frac{100 \times 101}{2}$$

$$= 50 \times 101$$

$$= 5050$$

1 से 200 तक की प्राकृत संख्याओं का योग

$$S_{200} = \frac{200 \times 201}{2}$$

$$= 100 \times 201$$

$$= 20100$$

101 से 200 तक की संख्याओं का योग

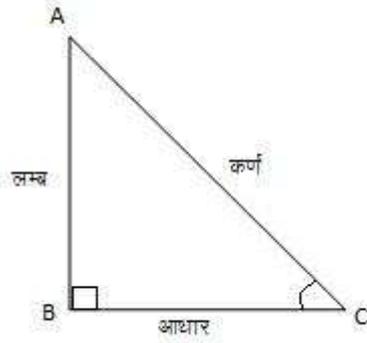
$$= S_{200} - S_{100}$$

$$= 20100 - 5050$$

$$= 15050$$

\*\*\* \_\_\_\_ \*\*\*

## अध्याय-6 त्रिकोणमितिय अनुपात



- i. समकोण त्रिभुज में सबसे लम्बी भुजा कर्ण होती है।  
ii. त्रिकोणमितीय अनुपात

1. $\sin \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$	4. $\text{cosec } \theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$
2. $\cos \theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$	5. $\sec \theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$
3. $\tan \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$	6. $\cot \theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$

निर्देश (1)  $\theta$  के सम्मुख भुजा लम्ब व कर्ण के अतिरिक्त शेष भुजा आधार होगी।

जैसे  $\angle C = \theta$  तो AB व आधार BC होगी।  $\sin C = \frac{AB}{AC}$  तथा  $\sin A = \frac{BC}{AC}$

( $\angle C$  के सम्मुख भुजा AB लम्ब आधार BC होगा।) ( $\angle A$  के सम्मुख भुजा BC लम्ब आधार AB होगा।)

विशेष i.  $\text{cosec } \theta = \frac{1}{\sin \theta}$  या  $\sin \theta = \frac{1}{\text{cosec } \theta}$

अतः  $\boxed{\sin \theta \text{ cosec } \theta = 1}$

ii.  $\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$  या  $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$

अतः  $\boxed{\sec \theta \cos \theta = 1}$

iii.  $\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$  या  $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$

अतः  $\boxed{\tan \theta \cot \theta = 1}$

iv.  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

v.  $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

न्यून कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात :-

इसमें  $0^\circ$  से  $90^\circ$  के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों का अध्ययन करेंगे।

त्रिकोणमिति के  $0^\circ$  से  $90^\circ$  के अनुपातों का मान ज्ञात करने हेतु सरल विधि -

1. सर्वप्रथम एक कॉलम में त्रिकोणमितीय अनुपात तथा ऊपर प्रथम पंक्ति में  $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  चित्रानुसार लिखेंगे।

कोण अनुपात	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \theta$					
$\cos \theta$					
$\tan \theta$					
$\cot \theta$					
$\sec \theta$					
$\text{cosec } \theta$					

2. सारणी के ऊपर 0, 1, 2, 3, 4 लिखकर 4 से विभाजित कर भागफल लिखेंगे।

$$\frac{0}{4} = 0, \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{3}{4} = \frac{3}{4}, \frac{4}{4} = 1$$

कोण अनुपात	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \theta$					
$\cos \theta$					
$\tan \theta$					
$\cot \theta$					
$\sec \theta$					
$\text{cosec } \theta$					

3.  $\sin \theta$  के सामने वाली पंक्ति में सारणी के ऊपर लिखें।

मानों (भागफल) 0 का वर्गमूल  $\sqrt{0} = 0$ ,  $\frac{1}{4}$  का वर्गमूल  $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ , का वर्गमूल  $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,

$\frac{3}{4}$  का वर्गमूल  $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 1 का वर्गमूल  $\sqrt{1} = 1$  लिखेंगे।

	$\sqrt{0}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{1}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

4.  $\cos \theta$  के सामने वाली पंक्ति में  $\sin \theta$  वाली पंक्ति में लिखें का क्रम परिवर्तित कर (अन्तिम से प्रथम की ओर) चित्र में दिखायें अनुसार लिखेंगे –

$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

5.  $\tan \theta$  के सामने वाली पंक्ति में  $\sin \theta$  के मानों को  $\cos \theta$  के मानों से विभाजित कर लिखेंगे।

$$\frac{0}{1} = 0, \quad \frac{1}{2} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \div \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{1}{2} = \sqrt{3}, \quad \frac{1}{0} = \infty \text{ (अपरिभाषित)}$$

$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$ (अपरिभाषित)
---------------	---	----------------------	---	------------	----------------------

Note – किसी संख्या में शून्य से भाग देने पर भागफल अपरिभाषित रहता है।

6.  $\cot \theta$  के सामने वाली पंक्ति में  $\tan \theta$  वाली पंक्ति में लिखे मानों का क्रम परिवर्तन कर चित्र में दिखायें अनुसार लिखेंगे।

$\cot \theta$	$\infty$ (अपरिभाषित)	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
---------------	----------------------	------------	---	----------------------	---

7.  $\sec \theta$  एवं  $\operatorname{cosec} \theta$  के सामने वाली पंक्तियों में क्रमशः  $\cos \theta$  व  $\sin \theta$  के मानों का व्युत्क्रम कर चित्र में दिखायें अनुसार लिखें –

$\sec \theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	$\infty$ (अपरिभाषित)
$\operatorname{cosec} \theta$	$\infty$ (अपरिभाषित)	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2

या  $\operatorname{cosec} \theta$  वाली पंक्ति में  $\sec \theta$  के मानों का परिवर्तन कर लिखेंगे।

इस प्रकार सारणी का निर्माण होगा –

कोण अनुपात	$0^\circ$ $0^\circ$	$30^\circ$ $\frac{\pi}{6}$	$45^\circ$ $\frac{\pi}{2}$	$60^\circ$ $\frac{\pi}{3}$	$90^\circ$ $\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$ (अपरिभाषित)
$\cot \theta$	$\infty$ (अपरिभाषित)	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\sec \theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	$\infty$ (अपरिभाषित)
$\operatorname{cosec} \theta$	$\infty$ (अपरिभाषित)	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2

**उदाहरण –1**  $\tan^2 60^\circ + 3 \cos^2 30^\circ$  का मान ज्ञात कीजिए।

**हल –** (सारणी से त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान रखने पर)

$$= (\sqrt{3})^2 + 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= 3 + 3 \times \frac{3}{4} = 3 + \frac{9}{4} = \frac{12+9}{4} = \frac{21}{4}$$

**उदाहरण -2**

हल  $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$  चूंकि  $\left[\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$   $\operatorname{cosec} 30^\circ = 2$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + 2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}(3-1)} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{8}$$

**उदाहरण -3**

यदि  $\tan 3x^\circ = \sin 45^\circ \cos 45^\circ + \sin 30^\circ$  हो तो  $x$  का मान ज्ञात कीजिए। ( $x < 90^\circ$ )

हल  $\tan 3x^\circ = \sin 45^\circ \cos 45^\circ + \sin 30^\circ$

$$\tan 3x^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$\tan 3x^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\tan 3x^\circ = 1$$

$$\text{चूकी } (1 = \tan 45^\circ)$$

$$\therefore \tan 3x^\circ = \tan 45^\circ$$

$$\text{अतः } 3x^\circ = 45^\circ$$

$$x^\circ = 15^\circ$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

**उदाहरण -4** यदि  $\sin(A+B) = 1$  तथा  $\cos(A-B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  यहाँ  $0^\circ < (A+B) \leq 90^\circ$   $A > B$  हो तो  $A$  तथा  $B$  के मान ज्ञात कीजिए।

हल  $\sin(A+B) = 1$

$$\sin(A+B) = \sin 90^\circ \quad \text{चूकी } [\sin 90^\circ = 1]$$

$$A+B = 90^\circ \quad \text{---(1)}$$

$$\cos(A-B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(A-B) = \cos 30^\circ$$

$$A-B = 30^\circ \quad \text{---(2)}$$

समीकरण 1 व 2 को जोड़ने पर

$$2A = 120^\circ$$

$$A = 60^\circ$$

$A$  का मान समीकरण 1 में रखने पर

$$60^\circ + B = 90^\circ$$

$$B = 90^\circ - 60^\circ$$

$$B = 30^\circ$$

$$\therefore A = 60^\circ, B = 30^\circ$$

**उदाहरण -5** सिद्ध कीजिए  $4 \cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ - \sin^2 30^\circ = -\frac{1}{4}$

हल L.H.S. =  $4 \cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ - \sin^2 30^\circ$

$$= 4(1)^2 - (2)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 4 \times 1 - 4 - \frac{1}{4} = 4 - 4 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} = \text{R.H.S}$$

**उदाहरण -6** सिद्ध कीजिए  $(1 - \sin 45^\circ - \sin^2 30^\circ)(1 + \cos 45^\circ + \cos 60^\circ) = \frac{7}{4}$

हल L.H.S. =  $(1 - \sin 45^\circ - \sin^2 30^\circ)(1 + \cos 45^\circ + \cos 60^\circ)$

$$= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{18-4}{8} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4} = R.H.S.
\end{aligned}$$

$$(A + B)(A - B)$$

उदाहरण -7 यदि  $x = 30^\circ$  हो तो सिद्ध किजिए-

$$(i) \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \quad (ii) \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

हल = (i)  $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

$$L.H.S. = \sin 3x - \sin 3x 30^\circ = \sin 90^\circ = 1$$

$$R.H.S. = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$= 3 \sin 30^\circ - 4 \sin^3 30^\circ$$

$$= 3 \left(\frac{1}{2}\right) - 4 \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{3}{2} - 4 \times \frac{1}{8}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\therefore L.H.S. = R.H.S.$$

हल = L. H. S.  $\rightarrow \cos 3x = \cos 3x 30^\circ = \cos 90^\circ = 0$

$$= R. H. S. \rightarrow \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$= 4 \cos^3 30^\circ - 3 \cos 30^\circ$$

$$= 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 4 \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\therefore L.H.S. = R.H.S.$$

## अध्याय-7 त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ के आधार पर विभिन्न प्रश्नों के हल करेंगे।

$\sin \theta, \operatorname{cosec} \theta$ , का

$\cos \theta, \sec \theta$ , का

तथा  $\tan \theta, \cot \theta$ , का व्युत्क्रम है

इस प्रकार

(i)  $\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$  या  $\sin \theta = \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta}$  या  $\sec \theta, \sin \theta = 1$

(ii)  $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$  या  $\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$  या  $\sec \theta, \cos \theta = 1$

(iii)  $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$  या  $\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$  या  $\cot \theta, \tan \theta = 1$

(iv)  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  (v)  $\tan \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

सर्वसमिकाएँ ज्ञात करने के लिए निम्न चरण अपनायेंगे -

प्रथम चरण	→ $\sin \theta = >$	द्वितीय चरण	→	
	$\cos \theta$			$\sin^2 \theta$
	$\tan \theta$			$\cos^2 \theta$
(प्रथम चरण	$\cot \theta$			$\tan^2 \theta$
त्रिकोणमितीय	$\sec \theta$			$\cot^2 \theta$
अनुपातों को	$\operatorname{cosec} \theta$			$\sec^2 \theta$
दिखाएँ गए क्रम				$\operatorname{cosec}^2 \theta$
में लिखें)				

तृतीय चरण

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

पंचम चरण

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

(i)  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

(ii)  $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$

(iii)  $1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$

चतुर्थ चरण

तृतीय चरण में प्रथम व द्वितीय पर को योग 1 के बराबर क्रमशः पाचवें व छठवें पद के बराबर करे।

पूर्व 1 जोड़कर

पंचम चरण → (इन्हें इन रूपों में भी लिखा जा सकता है।)

सर्वसमिका → 1	$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$	$\begin{cases} \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \\ \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \end{cases}$
सर्वसमिका → 2	$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$	$\begin{cases} 1 = \sec^2 \theta - \tan^2 \theta \\ \tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1 \end{cases}$
सर्वसमिका → 3	$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$	$\begin{cases} 1 = \operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta \\ \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta - 1 \end{cases}$

उदाहरण -1 सिद्ध कीजिए की  $-\frac{1}{1+\sin \theta} + \frac{1}{1-\sin \theta} = 2 \sec \theta$

हल = L. H. S. →  $\frac{1}{1+\sin \theta} + \frac{1}{1-\sin \theta}$

$$= \frac{1-\sin \theta + 1+\sin \theta}{(1+\sin \theta)(1-\sin \theta)} + \frac{2}{1-\sin^2 \theta} \text{ चूकी } [1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta]$$

$$= 2 \frac{1}{\cos^2 \theta} = 2 \sec^2 \theta$$

उदाहरण -2 सिद्ध कीजिए की  $-\frac{1}{1+\cos \theta} = \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta$

हल = L. H. S. →  $\sqrt{\frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta}}$  अंश व हर का  $\sqrt{1+\cos \theta}$  से गुणा करने पर

$$= \sqrt{\frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta}} \times \sqrt{\frac{1+\cos \theta}{1+\cos \theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos \theta)^2}{1-\cos \theta}} \times \sqrt{\frac{(1+\cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}}$$

$$= \frac{1+\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta$$

$$= R. H. S.$$

**उदाहरण -3** सिद्ध कीजिए की  $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$

हल L. H. S.  $\rightarrow \cos^4 \theta - \sin^4 \theta$

$$= (\cos^2 \theta)^2 - (\sin^2 \theta)^2 \text{ चूकी } [a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)]$$

$$= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \text{ चूकी } [\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1]$$

$$= 1(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad [\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta]$$

$$= (1 - \sin^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \theta = R. H. S.$$

**उदाहरण -4** सिद्ध कीजिए की  $\left(\frac{1+\tan^2 \theta}{1+\cot^2 \theta}\right) = \left(\frac{1-\tan^2 \theta}{1-\cot^2 \theta}\right)^2 = \tan^2 \theta$

हल L. H. S.  $\rightarrow$

(i)  $\frac{1+\tan^2 \theta}{1+\cot^2 \theta}$

$$= \frac{\sec^2 \theta}{\operatorname{cosec}^2 \theta}$$

$$= \left[\frac{\sec \theta}{\operatorname{cosec} \theta}\right]^2 = \left[\frac{1/\cos \theta}{1/\sin \theta}\right]^2$$

$$= \left[\frac{1}{\cos \theta} \times \frac{\sin \theta}{1}\right]^2 = \left[\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right]^2 = (\tan \theta)^2$$

$$= \tan^2 \theta = R. H. S.$$

(ii)  $\left(\frac{1-\tan^2 \theta}{1-\cot^2 \theta}\right)^2$   $\tan^2 \theta, \cot^2 \theta$  को  $\sin^2 \theta$  व  $\operatorname{cosec}^2 \theta$  में बदलिए।

$$= \left[\frac{1-\sin^2 \theta}{1-\cos^2 \theta}\right]^2 = \left[\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}\right]^2$$

$$= \left[\frac{(\cos \theta - \sin \theta)(\cos \theta + \sin \theta)}{\sin \theta(\sin \theta - \cos \theta)}\right]^2$$

$$= \left[\frac{(\sin \theta - \cos \theta) \sin \theta}{\cos \theta(\sin \theta - \cos \theta)}\right]^2$$

$$= \left[\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right]^2 = \tan^2 \theta = R. H. S.$$

**पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात**

यदि दो कोणों का योग  $90^\circ$  हो तो दोनों कोण एक-दूसरे के पूरक कोण कहलाते हैं।  $\theta^\circ$  का पूरककोण  $90^\circ - \theta^\circ$  होगा। समकोण  $\triangle ABC$  में  $\angle B$  समकोण हो तो  $\angle A$  व  $\angle C$  का योगफल  $90^\circ$  होगा।

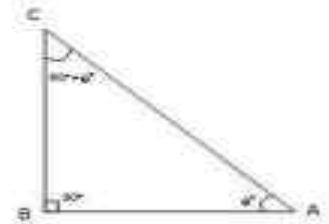
$$\angle A + \angle C = 90^\circ$$

यहाँ किसी कोण का  $\sin =$  उसके पूरक कोण का  $\cos$   
 किसी कोण का  $\tan =$  उसके पूरक कोण का  $\cot$   
 किसी कोण का  $\sec =$  उसके पूरक कोण का  $\operatorname{cosec}$

अर्थात् (i)  $\begin{cases} \sin(90^\circ - \theta^\circ) = \cos \theta \\ \cos(90^\circ - \theta^\circ) = \sin \theta \end{cases}$

(ii)  $\begin{cases} \tan(90^\circ - \theta^\circ) = \cot \theta \\ \cot(90^\circ - \theta^\circ) = \tan \theta \end{cases}$

(iii)  $\begin{cases} \sec(90^\circ - \theta^\circ) = \operatorname{cosec} \theta \\ \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta^\circ) = \sec \theta \end{cases}$



**उदाहरण -1** का मान ज्ञात कीजिए  $-\frac{\cos 37^\circ}{\sin 53^\circ}$

हल विधि -1  $\frac{\sin(90-37^\circ)}{\sin 53^\circ} = \frac{\sin 53^\circ}{\sin 53^\circ} = 1$

या विधि -2  $-\frac{\cos(90^\circ-53^\circ)}{\sin 53^\circ} = -\frac{\sin 53^\circ}{\sin 53^\circ} = -1$

**उदाहरण -2**  $\sin^2 50^\circ + \sin^2 40^\circ$

चूकी  $\sin 50^\circ = \sin(90 - 40^\circ) = \cos 40^\circ$

हल  $\cos^2 40^\circ + \sin^2 40^\circ$  चूकी  $[\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1]$

$$= 1$$

**उदाहरण -3**  $\tan 39^\circ + \cot 51^\circ$

$$\begin{aligned}\text{हल} \quad & \tan(90^\circ - 51^\circ) - \cot 51^\circ \\ & = \cot 51^\circ - \cot 51^\circ \\ & = 0\end{aligned}$$

उदाहरण -4 सिद्ध कीजिए कि  $\tan 75^\circ \tan 15^\circ \tan 20^\circ \tan 70^\circ = 1$

$$\begin{aligned}\text{हल} \quad & L.H.S. \rightarrow \tan 15^\circ \tan 20^\circ \tan 70^\circ \tan 75^\circ \\ & = \tan 15^\circ \tan 20^\circ \tan(90^\circ - 20^\circ) \tan(90^\circ - 15^\circ) \\ & = \tan 15^\circ \tan 20^\circ \cot 20^\circ \cot 15^\circ \\ & = \tan 15^\circ \tan 20^\circ \times \frac{1}{\tan 20^\circ} \times \frac{1}{\tan 15^\circ} \\ & = 1 = R.H.S.\end{aligned}$$

उदाहरण -5 यदि  $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$  हो तो  $A$  का मान ज्ञात कीजिए।

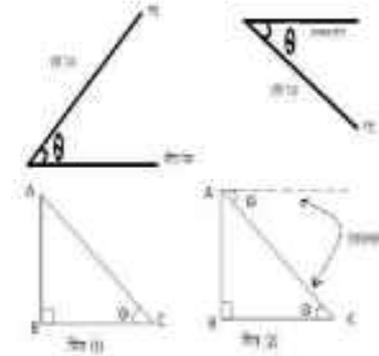
$$\begin{aligned}\text{हल} \quad & \tan 2A = \cot(A - 18^\circ) \\ & \cot(90^\circ - 2A^\circ) = \cot(A - 18^\circ) \\ & 90^\circ - 2A^\circ = A - 18^\circ \\ & 3A = 108^\circ \\ & A = 36^\circ\end{aligned}$$



## अध्याय-8 ऊँचाई और दूरी

### त्रिकोणमिति के अनुप्रयोग

1. मनुष्य की आँख क्षैतिज रेखा के साथ उपर देखनेपर (दृष्टि रेखा) जो कोण बनाती है, वह उन्नयन कोण कहलाता है। तथा नीचे की ओर रखी वस्तु को देखने पर क्षैतिज रेखा व दृष्टि रेखा के मध्य का कोण अवनयन कोण कहलाता है।
2. इस प्रकार के प्रश्नों में सदैव समकोण त्रिभुज बनेगा। इसमें मीनार, खम्भा, पेड़ आदि लम्बरूप में होगी। जिसे चित्र में AB द्वारा व्यक्त किया है।



चित्र (i) में C से मीनार के शीर्ष को देखने पर कोण उन्नयन कोण कहलायेगा।

चित्र (ii) में A से (मीनार के शीर्ष से) बिन्दु C को देखता है तो यह कोण अवनयन कोण कहलायेगा। जिसे चित्रानुसार बनाया जायेगा। जा  $\angle C$  के एकान्तर होने के कारण  $\angle C$  के बराबर होगा।

3. समकोण त्रिभुज में त्रिकोणमितीय अनुपातों का प्रयोग

$\Delta ABC$  में

$\tan\theta$	$\frac{AB}{BC}$	$\frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$
$\sin\theta$	$\frac{AB}{AC}$	$\frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$
$\cos\theta$	$\frac{BC}{AC}$	$\frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$

sin	cos	tan
↑	↑	↑
ल.	आ.	ल.
क क आ		
संक्षेप में		

$\angle C, AB, BC$  या  $AC$  में दिए मान रख कर समस्या को हल करेंगे।

**उदाहरण -1** एक स्तम्भ के उपरी सिरे का उन्नयन कोण आधार तल के एक बिन्दु पर  $60^\circ$  है। यदि यह बिन्दु स्तम्भ के आधार बिन्दु से  $10\sqrt{3}$  मीटर की दूरी पर हो तो स्तम्भ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना  $AB$  स्तम्भ है जिसके आधार से  $10\sqrt{3}$  मीटर की दूरी पर स्थित बिन्दु  $C$  से स्तम्भ के शिखर का उन्नयन कोण  $60^\circ$  माना स्तम्भ  $AB$  की ऊँचाई  $h$  मीटर है।

समकोण  $\Delta ABC$  में  $\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{10\sqrt{3}}$$

$$h = 10\sqrt{3} \times 3$$

$$h = 30 \text{ मीटर}$$

अतः स्तम्भ  $AB$  की उचाई 30 मीटर है।

**उदाहरण -2** एक उर्ध्वाधर खम्बे परछाई, खम्बे की उचाई के बराबर है तो सूर्य का उन्नयन कोण होगा।

समकोण त्रिभुज  $\Delta ABC$  में लम्ब व आधार बराबर है लम्ब =  $AB$ , आधार =  $BC$

$$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)$$

$$\tan\theta = \frac{h}{h}$$

$$\tan\theta = 1$$

$$\tan\theta = \tan 45^\circ$$

$$\theta = 45^\circ$$

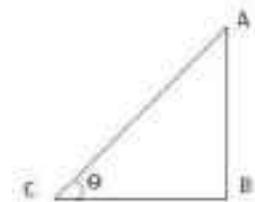
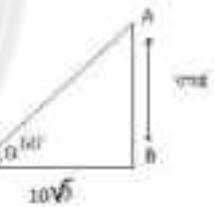
**उदाहरण -3** 100 मी. चोड़ी नदी के मध्य एक छोटा टापू है। इस पर एक चोड़ी नदी के मध्य एक छोटा टापू है। इस पर एक ऊँचा वृक्ष है। नदी के विपरीत किनारों पर दो बिन्दु  $P$  व  $Q$  इस प्रकार स्थित है कि  $P, Q$  और वृक्ष एक रेखा में है। यदि  $P$  व  $Q$  से वृक्ष की चोटी का उन्नयन कोण  $30^\circ$  और  $40^\circ$  हो, तो वृक्ष की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना वृक्ष की ऊँचाई  $AO = h$  मीटर है।

समकोण  $\Delta POA$  में

$$\tan 30^\circ = \frac{OA}{OP} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

$$\text{या } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{(100-x)}$$



$$\text{या } h\sqrt{3} = (100 - x) \quad \rightarrow (1)$$

समकोण  $\Delta AOQ$  में

$$\tan 45^\circ = \frac{OA}{OQ}$$

$$\text{या } 1 = \frac{h}{x} \quad \text{या } h = x \quad \rightarrow (2)$$

(1) में (2) से  $h = x$  रखने पर  $\sqrt{3}x = 100 - x$

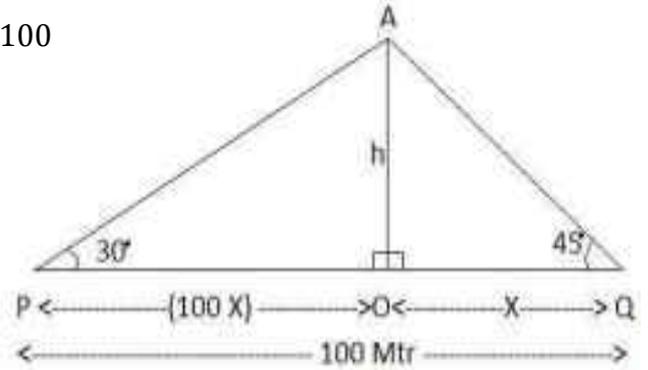
$$\text{या } \sqrt{3}x + x = 100 \quad \text{या } x(\sqrt{3} + 1) = 100$$

$$\text{या } x = \frac{100}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} \quad \text{परिमेयकरण}$$

$$= \frac{100(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2 - (1)^2}$$

$$= \frac{100(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2 - (1)^2} = 50(\sqrt{3}-1)$$

$$= \frac{50 \times 100(\sqrt{3}-1)}{2} = 50(\sqrt{3}-1) \text{ मी.}$$



$$\text{अतः 2 से } h = 50(\sqrt{3}-1)$$

$$= 50(1.732 - 1)$$

$$= 50 \times 0.732$$

$$= 36.6 \text{ मीटर}$$

**उदाहरण -4** किसी मिनार के आधार से  $a$  व  $b$  दूरी पर एक ही रेखा पर स्थित दो बिन्दु क्रमशः  $c$  व  $d$  से देखने पर मीनार के शिखर के उन्नयन कोण एक दूसरे के पूरक है। सिद्ध कीजिए कि मीनार की एक ऊँचाई  $\sqrt{ab}$  है।

हल: माना  $AB$  मीनार  $= h$  मी. है,  $c$  व  $d$  पर क्रमश कोण  $\theta$  व  $(90 - \theta)$  परस्पर पूरक कोण है।

$$BC = a \text{ Mtr } BD = b \text{ Mtr}$$

समकोण  $\Delta POA$  में

$$\tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{या } \tan \theta = \frac{h}{a} \quad \rightarrow (1)$$

समकोण  $\Delta ABD$  में

$$\tan (90 - \theta) = \frac{AB}{BD}$$

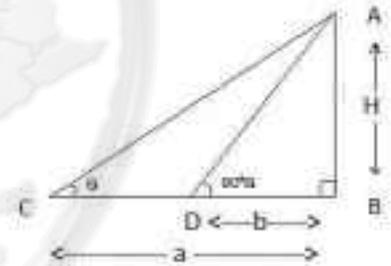
$$\text{या } \cot \theta = \frac{h}{b} \quad \rightarrow (2)$$

$$1 \times 2 \quad \tan \theta \times \cot \theta = \frac{h}{a} \times \frac{h}{b}$$

$$\text{या } h^2 = ab$$

$$\text{या } \frac{h^2}{ab} = 1$$

$$\text{या } h = \sqrt{ab}$$



अध्याय – 9  
निर्देशांक ज्यामिति

मुख्य सूत्र

1. बिन्दु  $P(x, y)$  की मूल बिन्दु से दूरी

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ जहाँ } O \text{ मूल बिन्दु है।}$$

नोट- मूल बिन्दु  $O$  के निर्देशांक  $(0, 0)$

2. दो बिन्दुओं के मध्य दूरी

यदि  $A(x_1, y_1)$  तथा  $B(x_2, y_2)$  दो दिये हुए बिन्दु हों तो उनके मध्य दूरी-

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

या

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

3. दो बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$$\begin{array}{ccc} & | & \\ \hline A(x_1, y_1) & C(x, y) & (x_2, y_2) B \end{array}$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$C(x, y) = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

4. विभाजन सूत्र-

(i) अन्तः विभाजन - यदि  $A(x_1, y_1)$  तथा  $B(x_2, y_2)$  को  $C(x, y)$  बिन्दु  $m_1 : m_2$  के अनुपात में अन्तः

विभाजन करें तो-

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{m_1} & & \xrightarrow{m_2} \\ A & C & B \\ (x_1, y_1) & (x, y) & (x_2, y_2) \end{array}$$

$$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

(ii) बाह्य विभाजन :-  $x = \frac{m_1 x_2 - m_2 x_1}{m_1 - m_2}, \quad y = \frac{m_1 y_2 - m_2 y_1}{m_1 - m_2}$

प्रश्न

Type - I

1.  $X$  - अक्ष का समीकरण लिखें।

Ans.  $Y = 0$

2.  $Y$  - अक्ष का समीकरण लिखें।

Ans.  $X = 0$

Type - II

1. बिन्दु  $(3, 4)$  की  $Y$  - अक्ष से दूरी ज्ञात करो।

Ans.  $Y$  - अक्ष से दूरी = 3 इकाई [ $y$  अक्ष से दूरी =  $x$  का निर्देशांक।]

2. बिन्दु  $(5, -2)$  की  $X$  - अक्ष से दूरी ज्ञात करो।

Ans.  $X$  - अक्ष से दूरी = 2 इकाई [दूरी सदैव धनात्मक होती है]

Type - III (सूत्र  $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$ )

1. बिन्दु  $(3, 4)$  की मूल बिन्दु से दूरी ज्ञात करो।

हल:- माना कि  $P(x, y) = (3, 4)$

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{(3)^2 + (4)^2} \\
&= \sqrt{9+16} \\
&= \sqrt{25} \\
&= 5 \text{ इकाई}
\end{aligned}$$

2. बिन्दु  $(-2, 3)$  की मूल बिन्दु से दूरी ज्ञात करो।

हल:- माना कि  $P(x, y) = (-2, 3)$

$$OP = ?$$

$$\begin{aligned}
OP &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
&= \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} \\
&= \sqrt{4+9} \\
&= \sqrt{13} \text{ इकाई}
\end{aligned}$$

3. बिन्दु  $(a \sin \theta, a \cos \theta)$  की मूल बिन्दु से दूरी ज्ञात कीजिये।

हल:- माना कि  $P(x, y) = (a \sin \theta, a \cos \theta)$

$$OP = ?$$

$$\begin{aligned}
OP &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
&= \sqrt{(a \sin \theta)^2 + (a \cos \theta)^2} \\
&= \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta} \\
&= \sqrt{a^2 \times 1} \\
&= \sqrt{a^2} \\
&= a \text{ इकाई}
\end{aligned}$$

अभ्यास प्रश्न- (सूत्र  $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$  पर आधारित)

- बिन्दु  $(-a, b)$  की मूल बिन्दु से दूरी ज्ञात करो।
- बिन्दु  $(\sin \theta, \cos \theta)$  की मूल बिन्दु से दूरी ज्ञात करो।
- बिन्दु  $(1, \sqrt{2})$  की मूल बिन्दु से दूरी ज्ञात करो।

Type IV - (दो बिन्दुओं के मध्य दूरी के सूत्र से)

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

प्रस. (1) बिन्दु  $(2, 3)$  और बिन्दु  $(5, 6)$  के बीच की दूरी ज्ञात करो।

$$\begin{aligned}
A(x_1, y_1) &= (2, 3) & B(x_2, y_2) &= (5, 6) \\
AB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
&= \sqrt{(5 - 2)^2 + (6 - 3)^2} \\
&= \sqrt{(3)^2 + (3)^2} \\
&= \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ इकाई}
\end{aligned}$$

2. यदि बिन्दु  $(x, 3)$  तथा  $(3, 7)$  के बीच की दूरी 5 इकाई हो तो  $x$  का मान ज्ञात करो।

हल:- ----- 5 इकाई -----

$$\begin{aligned}
A(x_1, y_1) &= (x, 3) & B(x_2, y_2) &= (3, 7) \\
AB &= 5 \text{ इकाई} \\
AB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}
\end{aligned}$$

$$\text{या, } 5 = \sqrt{(5-x)^2 + (7-3)^2}$$

$$\text{या } 5 = \sqrt{(5-x)^2 + (4)^2}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$\text{या } (5)^2 = (5-x)^2 + (4)^2$$

$$\text{या } (5-x)^2 = (5)^2 - (4)^2$$

$$\text{या } (5-x)^2 = 25-16$$

$$\text{या } (5-x)^2 = 9$$

$$\text{या } (5-x) = \sqrt{9}$$

$$\text{या } 5-x = \pm 3$$

$$(i) \quad -x = \pm 3 - 5 \quad (ii) \quad -x = -3 - 5$$

$$\text{या } -x = -2$$

$$\text{या } -x = -8$$

$$\text{या } x = 2$$

$$\text{या } x = 8$$

$$\text{Ans. } x = 2, 8$$

प्र. (1) बिन्दुओं (3, a) और (4, 1) के बीच की दूरी  $\sqrt{10}$  हो तो a का मान ज्ञात करो।

प्र. (2) x - अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात करो जो बिन्दुओं (-2, -5) और (2, -3) से समदुरस्थ हो।

TYPE-5 (मध्य बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करना)

$$\text{सुत्र } x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

प्र. (1) बिन्दुओं (22, 20) और (0, 16) को मिलाने वाली रेखा

हल-

P (मध्यबिन्दु)

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ \left( \begin{array}{c} 22, 20 \\ x_1, y_1 \end{array} \right) & (x, y) & \left( \begin{array}{c} 0, 16 \\ x_2, y_2 \end{array} \right) \end{array}$$

मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$x = \frac{22 + 0}{2} \quad y = \frac{20 + 16}{2}$$

$$x = \frac{22}{2} = 11 \quad y = \frac{36}{2} = 18$$

$$P(x, y) = (11, 18)$$

प्र. (2) किसी वृत्त के व्यास का एक सिरा (4, 0) है तथा वृत्त के केन्द्र बिन्दु के निर्देशांक (4, 1) है तो वृत्त के व्यास के दूसरे सिरे के निर्देशांक ज्ञात करो।

हल:- वृत्त का केन्द्र, व्यास AB का मध्य बिन्दु होता है अतः मध्य बिन्दु ज्ञात करने के सुत्र का प्रयोग करेंगे।

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\frac{4}{1} = \frac{4 + x_2}{2} \quad \frac{4}{1} = \frac{0 + y_2}{2}$$

$$\text{या } 4 + x_2 = 4 \times 2 \quad 0 + y_2 = 2 \times 1$$

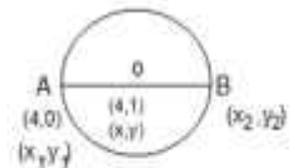
$$4 + x_2 = 8$$

$$y_2 = 2$$

$$x_2 = 8 - 4$$

$$x_2 = 4$$

$$\text{बिन्दु B के निर्देशांक B} = (4, 2)$$



अभ्यास प्रश्न-

प्र. (1) एक रेखाखण्ड AB का एक सिरा A(4, 0) है तथा मध्य बिन्दु M(4, 1) है तो रेखाखण्ड के दूसरे सिरे B के निर्देशांक ज्ञात करो।

Type – 6 विभाजन पर आधारित प्रश्न –

(A) अन्त : विभाग सूत्र  $x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$

$$x = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

प्रस.(1) उस बिन्दू के निर्देशांक ज्ञात किजिए जो बिन्दुओं  $(-2,1)$  तथा  $(5,4)$  को मिलाने वाली रेखा को 2:3 के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है।

हल:-

(2)	P	(3)
$\frac{m_1}{A}$	(x,y)	$\frac{m_2}{B}$
$(-2,1)$		$(5,4)$
$(x_1,y_1)$		$(x_2,y_2)$

अन्तः विभाजित करने वाले बिन्दू P के निर्देशांक

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2} \quad y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

$$x = \frac{2 \times 5 + 3 \times (-2)}{2 + 3} \quad y = \frac{2 \times 4 + 3 \times 1}{2 + 3}$$

$$x = \frac{10 - 6}{5} \quad y = \frac{8 + 3}{5}$$

$$x = \frac{4}{5} \quad y = \frac{11}{5}$$

बिन्दू P के निर्देशांक  $(\frac{4}{5}, \frac{11}{5})$

प्रस.(2) बिन्दुओं  $(-3,5)$  और  $(4,-9)$  को मिलाने वाली रेखाखण्ड को बिन्दू  $(-2,3)$  किस अनुपात में विभाजित करता है।

हल:-

A	P	B
$\frac{m_1}{(-3,5)}$	!	$\frac{m_2}{(4,-9)}$
$x_1, y_1$		$x_2, y_2$

माना बिन्दू P  $(-2,3)$ , बिन्दुओं A  $(-3,5)$  तथा B  $(4,-9)$  को  $m_1 : m_2$  में विभाजित करती है। इस स्थिति में

अन्तः विभाजन बिन्दू सूत्र से-

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$$

$$\frac{-2}{1} = \frac{m_1 \times 4 + m_2 \times (-3)}{m_1 + m_2}$$

$$\frac{-2}{1} = \frac{4m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2}$$

वज्रगुणन से

$$-2(m_1 + m_2) = 4m_1 - 3m_2$$

$$-2m_1 - 2m_2 = 4m_1 - 3m_2$$

$$-2m_1 - 4m_1 = -3m_2 + 2m_2$$

$$-6m_1 = -m_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{6} \text{ या } m_1 : m_2 = 1 : 6$$

प्रस.(3) x- अक्ष बिन्दुओं A  $(3,-5)$  और B  $(-4,7)$  को मिलाने वाली रेखा को किस अनुपात में विभाजित करती है।

$$A \frac{m_1}{p} B$$

$$\begin{pmatrix} 3-5 \\ x_1 y_1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x\text{अक्ष पर} \\ y=0 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} -4,7 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix}$$

माना बिन्दु P, X – अक्ष पर स्थित बिन्दु है। जिसके निर्देशांक (y=0) या p(x,0) होंगे। माना बिन्दु P, रेखाखण्ड AB को  $m_1 : m_2$  में विभाजित करता है। इस स्थिति में अन्तः विभाजन बिन्दु सूत्र से (चुकि यहाँ Y=0 है अतः Y निर्देशांक के सूत्र का उपयोग किया जाएगा)

$$y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

$$\frac{0}{1} = \frac{m_1 \times 7 + m_2 x - 5}{m_1 + m_2}$$

$$\frac{0}{1} = \frac{7m_1 - 5m_2}{m_1 + m_2}$$

वज्र गुणन से

$$7m_1 - 5m_2 = 0$$

$$7m_1 - 5m_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{5}{7} \quad m_1 : -m_2 = 5 : 7$$

(B) बाह्य विभाजन :

विभाजन बिन्दु

$$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2) \quad P(x, y)$$

$$\text{सूत्र:} \quad x = \frac{m_1 x_2 - m_2 x_1}{m_1 - m_2}, \quad y = \frac{m_1 y_2 - m_2 y_1}{m_1 - m_2}$$

प्रश्न: (1) उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं A(5,-2) और B(-1 $\frac{1}{2}$ ,4) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 7:9 में बाह्य विभाजित करता है।

हल:  $\frac{m_1 : m_2}{7 : 9}$

$$\begin{matrix} A(5,-2) & B(-1\frac{1}{2},4) & P(x,y) \\ x_1 y_1 & x_2 y_2 & \end{matrix}$$

बाह्य विभाजन सूत्र से

$$x = \frac{m_1 x_2 - m_2 x_1}{m_2 - m_1}, \quad y = \frac{m_1 y_2 - m_2 y_1}{m_1 - m_2}$$

$$x = \frac{1(-1\frac{1}{2}) - 9(5)}{7 - 9}, \quad y = \frac{7(4) - 9(-2)}{7 - 9}$$

$$x = \frac{7\left(\frac{-3}{2}\right) - 45}{-2}, \quad y = \frac{28 + 18}{-2}$$

$$x = \frac{-21 - 45}{-2}, \quad y = \frac{46}{-2}$$

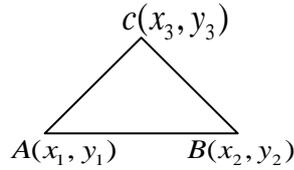
$$x = \frac{\left(\frac{-111}{2}\right)}{2}, \quad y = -23$$

$$x = \frac{-111}{4}, \quad y = -23$$

$$x = 27\frac{-3}{4}, \quad y = -23$$

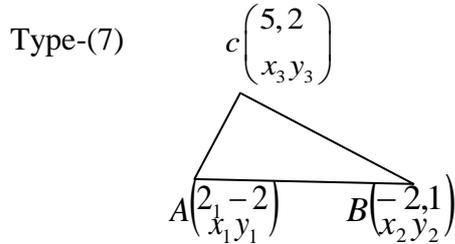
अभ्यास प्रश्न: 1. बिन्दुओं  $(-4,4)$  और  $(7,2)$  को मिलाने वाली रेखा को 4:7 के अनुपात में बाह्य विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करो।

Type-(7) त्रिभुज का क्षेत्रफल:



$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल } \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

प्रश्न:1. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसके शीर्ष क्रमशः  $(2,-2)$ ,  $(-2,1)$  और  $(5,2)$  हैं।



$$\begin{aligned} \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \\ &= \frac{1}{2} [2(1 - 2) - 2(2 + 2) + 5(-2 - 1)] \\ &= \frac{1}{2} [2(-1) - 2(4) + 5(-3)] \\ &= \frac{1}{2} (-2 - 8 - 15) = \frac{1}{2} (-25) = 12.5 \text{ वर्ग इकाई} \end{aligned}$$

नोट: क्षेत्रफल हमेशा धनात्मक ही लेते हैं।

प्रश्न:2. सिद्ध करो कि बिन्दु  $(1,2)$ ,  $(-1,0)$  तथा  $(2,3)$  संरेखीय है।

Hints - यदि

तीन बिन्दु एक ही सरल रेखा में स्थित हो तो वे संरेखीय बिन्दु कहलाते हैं।

नोट:- बिन्दुओं के संरेखीय होने की शर्त त्रिभुज का क्षेत्रफल = 0

$$A(x_1, y_1) = (1, 2)$$

हल:-  $B(x_2, y_2) = (-1, 0)$

$$C(x_3, y_3) = (2, 3)$$

$$\begin{aligned} \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \\ &= \frac{1}{2} [1(0 - 3) - 1(3 - 2) + 2(2 - 0)] \\ &= \frac{1}{2} [1(-3) - 1(1) + 2(2)] \\ &= \frac{1}{2} (-3 - 1 + 4) \\ &= \frac{1}{2} (0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

त्रिभुज का क्षेत्रफल = 0

अतः बिन्दु A, B, C संरेख हैं। (इति सिद्धम्)

प्रश्न:3. यदि बिन्दु  $(1,2)$ ,  $(-1,x)$  तथा  $(2,3)$  संरेखी हो तो x का मान ज्ञात करो।

Hints - यदि तीन बिन्दु एक ही सरल रेखा में स्थित हो तो वे संरेखीय बिन्दु कहलाते हैं।

नोट:- बिन्दुओं के संरेखीय होने की शर्त त्रिभुज का क्षेत्रफल = 0

$$\begin{aligned} A(x_1, y_1) &= (1, 2) \\ \text{हल: } B(x_2, y_2) &= (-1, x) \\ C(x_3, y_3) &= (2, 3) \end{aligned}$$

बिन्दु A, B, C संरेखी हैं।

$\Delta ABC$  का क्षेत्रफल = 0

$$\frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] = 0$$

$$\frac{1}{2} [1(x-3) - 1(3-2) + 2(2-x) = 0]$$

$$\frac{1}{2} [x-3-1+4-2x] = 0$$

$$\frac{1}{2} [-x] = 0$$

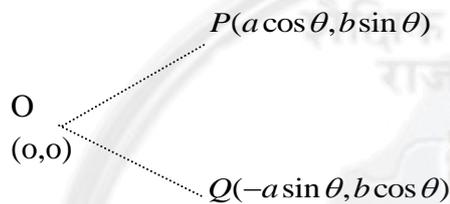
$$-x = 0$$

$$x = 0$$

प्रश्न: यदि P और Q के निर्देशांक क्रमशः  $(a \cos \theta, b \sin \theta)$  और  $(-a \sin \theta, b \cos \theta)$  हैं तो सिद्ध कीजिए

$$op^2 + oq^2 = a^2 + b^2 \text{ जहा } o \text{ मूल बिन्दू है।}$$

हल:



$$\text{दुरी का सूत्र} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$L.H.S. = OP^2 + OQ^2$$

$$= \left[ \sqrt{(a \cos \theta - 0)^2 + (b \sin \theta - 0)^2} \right]^2 + \left[ \sqrt{(-a \sin \theta - 0)^2 + (b \cos \theta - 0)^2} \right]^2$$

$$= (a \cos \theta)^2 + (b \sin \theta)^2 + (-a \sin \theta)^2 + (b \cos \theta)^2$$

$$= a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta$$

$$= (a^2 + b^2) \cos^2 \theta + (a^2 + b^2) \sin^2 \theta$$

$$= (a^2 + b^2) (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$= a^2 + b^2$$

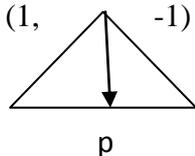
$$= R.H.S.$$

$$OP^2 + OQ^2 = a^2 + b^2$$

(इति सिद्धम्)

प्रश्न:- उस त्रिभुज की माध्यिकाओं की लम्बाइयों ज्ञात कीजिए, जिसके शीर्ष  $(L, -1)$ ,  $(0, 4)$  और  $(-5, 3)$  हैं। (very dmpostons questions)

हल:- A  $(1, -1)$



B  $(0, 4)$

C  $(-5, 3)$  (अतः सर्वप्रथम भुजाओं के मध्य बिन्दु ज्ञात करेंगे)

माध्यिका: शीर्ष से सामने वाली भुजा के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखा माध्यिका कहलाती है।

$$\text{मध्य बिन्दु का मुख} \left[ \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right]$$

P, Q, R क्रमशः : BC, AC व AB के मध्य बिन्दु है

$$\begin{aligned} \text{अतः P के निर्देशांक} &= \left[ \frac{0-5}{2}, \frac{4+3}{2} \right] \\ &= \left[ \frac{-5}{2}, \frac{7}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Q के निर्देशांक} &= \left[ \frac{1-5}{2}, \frac{-1+3}{2} \right] \\ &= (-2, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{R के निर्देशांक} &= \left( \frac{1+0}{2}, \frac{4-1}{2} \right) \\ &= \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{AP की लम्बाई} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{AP} &= \sqrt{\left( \frac{-5}{2} - 1 \right)^2 + \left( \frac{7}{2} + 1 \right)^2} \\ &= \sqrt{\left( \frac{-7}{2} \right)^2 + \left( \frac{9}{2} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{81}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{130}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{130}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{BQ की लम्बाई} &= \sqrt{(-2-0)^2 + (1-4)^2} \\ &= \sqrt{4+9} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{CR की लम्बाई} &= \sqrt{\left( \frac{1}{2} + 5 \right)^2 + \left( \frac{3}{2} - 3 \right)^2} \\ &= \sqrt{\left( \frac{11}{2} \right)^2 + \left( \frac{-3}{2} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{121}{4} + \frac{9}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{130}}{2} \end{aligned}$$

विशेष अभ्यास प्रश्न:

(1) सिद्ध कीजिये कि बिन्दु  $(a, a)$ ,  $(-a, -a)$  और  $(-\sqrt{3a}, \sqrt{3a})$  एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

(Hint : त्रिभुज का प्रकार ज्ञात करने के लिये दूरी सूत्र से तीनों भुजाओं की लम्बाई ज्ञात करें।)

(2) यदि एक समबाहु त्रिभुज के दो शीर्ष  $(0, 0)$  और  $(3, \sqrt{3})$  हों, तो तीसरा शीर्ष ज्ञात करो।

(3) रेखा  $3x + y = 9$  बिन्दुओं  $(1, 3)$  तथा  $(2, 7)$  को मिलाने वाले रेखाखण्ड को किस अनुपात में विभाजित करती है।

(4) यदि त्रिभुज की भुजाओं के मध्य  $(1, 2)$ ,  $(0, -1)$  और  $(2, -1)$  हैं, तो त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिये।

## अध्याय - 10

## बिंदुपथ

अतिलघुरात्मक प्रश्न (1 अंक )

क्र-स-	प्रश्न	हल	चित्र
1	किसी समतल पर लुढ़कने वाले वृत्त के केंद्र का बिंदुपथ	समतल के समांतर रेखा	
2	घड़ी के पेंडुलम का बिंदुपथ	वृत्त का माप	
3	घड़ी की सुई का बिंदुपथ	वृत्ताकार	
4	एक स्थिर बिंदु से समदूरस्थ बिंदु का बिंदुपथ	वृत्त की परिधि	
5	दो स्थिर बिंदुओं से समदूरस्थ बिंदु का बिंदुपथ	दोनों बिंदुओं को मिलने वाली रेखा का लंब समद्विभाजक	
6	त्रिभुज के शीर्षों से समदूरस्थ बिंदु	परिकेन्द्र	
7	त्रिभुज की भुजाओं से समदूरस्थ बिंदु	अंतःकेंद्र	

बिंदुपथ - दी गई शर्त के अनुसार बिंदुओं के गमन का रास्ता।

(B) 3 अंक भार के लघुरात्मक प्रश्न

(1) त्रिभुज ABC में मध्यिका AD, BE, CF एक बिंदु G से गुजरने हैं यदि  $AG = 6 \text{ Cm}$ ,  $BE = 12.6 \text{ Cm}$  तथा  $FG = 3 \text{ Cm}$  तो AD, GE और GC ज्ञात कीजिये ?

हल - केंद्रक G मध्यिका को 2 : 1 में विभाजित करती है।

$$\text{अतः } AG = 2a \text{ व } GD = a \text{ व } AD = 3a$$

$$\text{दिया है (i) } AG = 6\text{cm}$$

$$2a = 6\text{cm}$$

$$a = \frac{6}{2}$$

$$a = 3\text{cm}$$

$$\text{अतः } AD = 3 \times 3 = 9$$

$$\text{(ii) } BG = 2b, \quad GE = b, \quad BE = 3b$$

$$\text{दिया है } BE = 12.6$$

$$3b = 12.6$$

$$b = \frac{12.6}{3} = 4.2$$

$$\text{अतः } GE = b = 4.2$$

$$\text{(iii) } GC = 2c, \quad GF = c, \quad CF = 3c$$

$$\text{अतः दिया है - } FG = 3\text{cm}$$

$$c = 3\text{cm}$$

$$GC = 2 \times 3 = 6$$

2)) त्रिभुज ABC में मध्यिकाएँ AD, BE, और CF बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं सिद्ध कीजिये की  $AD + BE > \frac{3}{2} AB$

हल - त्रिभुज AGB में - [त्रिभुज में दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है]

$$AG + BG > AB$$

मान रखने पर

$$\frac{2}{3} AD + \frac{2}{3} BE > AB$$

$$AD + BE > \frac{3}{2} AB$$

याद रखने योग्य

(3) यदि एक त्रिभुज की सभी मध्यिकाएँ समान हों तो वह त्रिभुज होगा

हल - दिया है - त्रिभुज ABC की मध्यिकाएँ AD, BE, व CF बिन्दु G पर मिलती हैं तथा

$$AD = BE = CF$$

सिद्ध करना है - त्रिभुज ABC एक समबाहु त्रिभुज होगा।

उपपत्ति - हम जानते हैं कि त्रिभुज की मध्यिकाओं को केंद्रक 2:1 में विभाजित करता है।

$$\text{अतः } AD = BE = CF \text{ (दिया है)}$$

$$\frac{2}{3} AD = \frac{2}{3} BE = \frac{2}{3} CF$$

$$\Rightarrow AG = BG = CG \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{इसी प्रकार } \frac{1}{3} AD = \frac{1}{3} BE = \frac{1}{3} CF$$

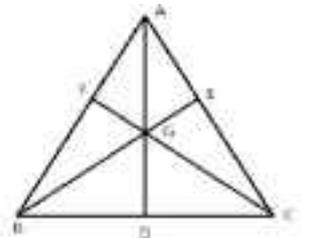
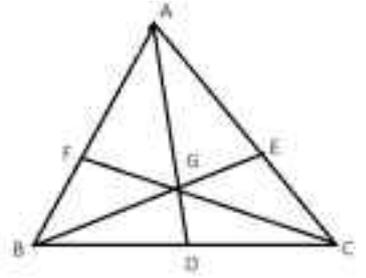
$$GD = GE = GF \dots \dots \dots (2)$$

त्रिभुज BGF व त्रिभुज CGE में

$$(1) \text{ से } BG = CG$$

$$(2) \text{ से } GF = GE$$

$$\angle BGF = \angle CGE$$



$AG = 2a$ तो $a = \frac{AG}{2}$ अतः $AD = 3a$ $= \frac{3}{2} AG$ $AG = \frac{2}{3} AD$	$BG = 2b$ तो $b = \frac{BG}{2}$ $BE = 3b$ $= \frac{3}{2} BG$ $BG = \frac{2}{3} BE$
--	---

## शीर्षभिमुख कोण

भुजा - कोण - भुजा नियम से  $\triangle BGF \cong \triangle CGE$

अतः सर्वांगसम त्रिभुज की संगत भुजाएँ समान होती हैं।

$$BF = CE$$

$$2BF = 2CE$$

$$AB = AC \dots \dots \dots (3)$$

इसी प्रकार  $\triangle CGD \cong \triangle AGF$

$$BC = AB \dots \dots \dots (4)$$

(3) व (4) से  $AB = BC = AC$

अतः त्रिभुज ABC एक समबाहु त्रिभुज है।

(4) सिद्ध कीजिये की शीर्षलंब समांगी ( एक ही बिन्दु से गुजरते ) होते हैं।

हल - दिया हुआ है - एक त्रिभुज ABC जिसमें AD, BE व CF शीर्ष लम्ब (शीर्ष से सामने डाला गया लम्ब) है।

सिद्ध करना है - शीर्ष लम्ब AD, BE व CF एक ही बिन्दु G से गुजरते हैं।

रचना - A से गुजरती हुई BC के समांतर रेखा QR खिंची। इसी प्रकार PR || AB एवं PQ || AB खींचकर त्रिभुज PQR बनाया।

उपपत्ति - (1) चतुर्भुज BCAR में AC || BR एवं PQ || AR (रचना से)

आमने सामने की भुजाएँ समांतर होने से BCAR समांतर चतुर्भुज होगा।

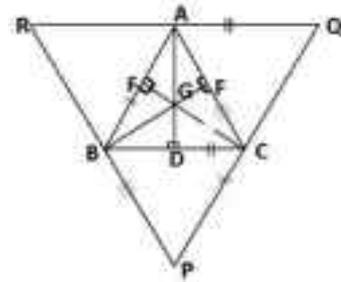
अतः  $AR = BC$  .....(1) [सम्मुख भुजाएँ बराबर]

(2) इसी प्रकार चतुर्भुज BCQA में AB || CQ एवं AQ || BC (रचना से)

अतः  $BC = AQ$  .....(2)

सामी. (1) व (2) से  $AR = AQ$  .....(3)

एवं AD  $\perp$  BC इसी प्रकार BE लम्ब अर्द्धक है PR का तथा CF लम्ब अर्द्धक है PQ का। लम्ब अर्द्धक समांगी होते हैं अतः AD, BE, CF समांगी होंगे।



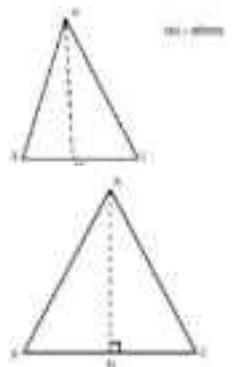
### प्रमुख परिभाषा -

(a) बिंदुपथ - विशेष नियम के द्वारा बने बिन्दुओं के समुच्चय से निर्मित पथ

(b) माध्यिका - त्रिभुज के शीर्ष के सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु से मिलाने वाला रेखाखण्ड।

(c) शीर्षलम्ब - त्रिभुज के शीर्ष से सम्मुख भुजा पर लम्ब। चित्र में AN शीर्षलम्ब है

(d) समांगी रेखाएँ - तीन या तीन से अधिक रेखाएँ यदि एक ही बिन्दु से होकर गुजरे तो समांगी कहलाती हैं।



## अध्याय – 11

## समरूपता

आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय (थेल्स प्रमेय)

“किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर खींची गई रेखा त्रिभुज की शेष दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।”

दिया है-  $\triangle ABC$  में  $DE \parallel BC$ , जहां  $DE$ ,  $AB$  व  $AC$  को  $D$ , व  $E$  पर काटती है।

$$\text{सिद्ध करना है } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

रचना:-  $BE$  व  $CD$  को मिलाने हैं तथा  $E$  से

$AB$  पर लम्ब  $EF$  व  $D$  से  $AC$  पर लम्ब

$DG$  डालते हैं।

उपपत्ति:-

$$\begin{aligned} \frac{\triangle ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle BDE \text{ का क्षेत्रफल}} &= \frac{\frac{1}{2} \times AD \times EF}{\frac{1}{2} \times BD \times EF} \\ &= \frac{AD}{BD} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{तथा- } \frac{\triangle ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle CED \text{ का क्षेत्रफल}} &= \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DG}{\frac{1}{2} \times CE \times DG} \\ &= \frac{AE}{CE} \end{aligned} \quad (2)$$

तथा  $\triangle BDE$  का क्षेत्रफल =  $\triangle CED$  का क्षेत्रफल

(एक ही आधार व एक समान्तर रेखा युग्म के मध्य बने त्रिभुजों के मध्य बने त्रिभुजों का क्षेत्रफल समान होता है।)

सभी (1), (2) व (3) से

$$\begin{aligned} \frac{\triangle ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle BDE \text{ का क्षेत्रफल}} &= \frac{\triangle ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle CED \text{ का क्षेत्रफल}} \\ \frac{AD}{BD} &= \frac{AE}{CE} \end{aligned}$$

HENCE PROVED

(इति सिद्धम्)

(i)  $\triangle$  का क्षेत्रफल =  $\frac{1}{2} \times$  आधार  $\times$  ऊँचाई।

(ii) एक बिन्दु से एक रेखा पर एक ही लम्ब खींचा जा सकता है। इसलिए  $AD$  भुजा व  $BD$  भुजा पर एक ही लम्ब  $EF$

समरूपता की अवधारणा से बोधायन प्रमेय का सत्यापन

दिया है  $\triangle ABC$  समकोण त्रिभुज है। जहां  $\angle B = 90^\circ$

सिद्ध करना है :  $AC^2 = AB^2 + BC^2$

रचना :  $B$  से कर्ण  $AC$  पर लम्ब  $AD$  डालते हैं।

उपपत्ति:  $\triangle ABC$  व  $\triangle ABD$  में

$\angle BAC = \angle BAD$  (उभयनिष्ठ)

तथा  $\angle CBA = \angle ADB$  (समकोण)

AA समरूपता गुणधर्म से

$\triangle ABC \sim \triangle ADB$  (जो कोण बराबर सिद्ध किए हैं उन्हें उसी क्रम में लिखें)

$$\text{अतः } \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DB} = \frac{AC}{AB}$$

$\triangle ABC$

$\triangle ADB$

इनमें से दो भाग चुने

जिनमें एक पद  $AB$  उभयनिष्ठ है।

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AD} &= \frac{AC}{AB} \\ AB^2 &= AC \cdot AD \end{aligned} \quad (1)$$

इसी प्रकार  $\triangle ABC$  व  $\triangle BDC$

$\angle ABC = \angle BDC$  (समकोण)

$\angle BCA = \angle BCD$  (उभयनिष्ठ)

AA समरूपता गुणधर्म से

Note =  $\angle B = \angle D$   
 $\angle C = \angle C$

$$\triangle BCA \sim \triangle DCB$$

$$\frac{BC}{DC} = \frac{CA}{CB} = \frac{BA}{DB}$$

$$\frac{BC}{DC} = \frac{CA}{CB}$$

$$BC^2 = CA \cdot DC \quad \text{----- (2)}$$

सभी (1) + समीकरण 2 से

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 &= AC \cdot AD + AC \cdot DC \\ &= AC (AD + DC) \\ &= AC \cdot AC \\ AB^2 + BC^2 &= AC^2 \end{aligned}$$

प्र.1 किसी समबाहु त्रिभुज ABC में BC भुजा पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि  $BD = \frac{1}{3}BC$  तो सिद्ध करो  $9 AD^2 = 7AB^2$

हल:- दिया है  $\triangle ABC$  समबाहु त्रिभुज है।

$$AB = AC = BC \quad (1)$$

तथा  $BD = \frac{1}{3}BC \quad (2)$

रचना:- A से भुजा BC पर लम्ब AE डालते हैं।

तथा समबाहु  $\triangle$  में शीर्ष लम्ब मध्य बिन्दु पर मिलता है:-

$$BE = \frac{1}{2}BC \quad (3)$$

उपपत्ति:-

Step - I (2) & (3) से

$$DE = BE - BD = \frac{1}{2}BC - \frac{1}{3}BC$$

$$DE = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) BC$$

$$= \frac{1}{6}BC \quad (4)$$

Step II  $\triangle ABE$  में

$$AE^2 = AB^2 - BE^2$$

$$\Rightarrow AE^2 = AB^2 - \left( \frac{1}{2}BC \right)^2 \text{ (समी (3) से)}$$

$$= AB^2 - \frac{1}{4}AB^2 \left( \frac{1}{2}BC \right)^2 \text{ (समी (3) से)}$$

$$= AB^2 - \frac{1}{4}AB^2 \left( \frac{1}{6}BC \right)^2$$

$$AE^2 = \frac{3}{4}AB^2 \text{ .....(5)}$$

Step - III समकोण  $\triangle ADE$  से

$$AD^2 = AE^2 + DE^2$$

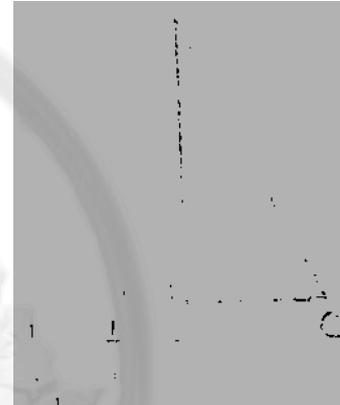
$$AD^2 = \frac{3}{4}AB^2 + \left( \frac{1}{6}BC \right)^2 \text{ (समी (4) से)}$$

$$AD^2 = \frac{3}{4}AB^2 + \left( \frac{1}{6}BC \right)^2$$

$$AD^2 = \frac{3}{4}(AB)^2 + \frac{1}{6}(AB)^2$$

$$AD^2 = \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{6} \right) (AB)^2$$

$$AD^2 = \frac{28}{36}AB^2$$



सरलता हेतु चरण-

- (1) AD ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम  $DE = BE = BD$  ज्ञात करेगी।
- (2) समकोण  $\triangle ABE$  से AE ज्ञात करेगें।
- (3) AE व DE का प्रयोग करके AD ज्ञात करो।
- (4)  $\triangle$  की सभी भुजाओं को आवश्यकतानुसार AB में लिखेगें।

$$AD^2 = \frac{7}{9} AB^2$$

$$9AD^2 = 7 AB^2$$

प्रमेय:- दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाओं के वर्गों के समानुपाती होता है ।

दिया है:-  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

सिद्ध करना है ।

$$\left(\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF}\right) = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2$$

रचना:- A से BC पर लम्ब AL, तथा

D से EF पर लम्ब DM डालते हैं ।

उपपत्ति:-  $\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$

$$\therefore \angle A = \angle D$$

$$\angle B = \angle E$$

$$\angle C = \angle F$$

तथा

$$\left(\frac{AB}{DE}\right) = \left(\frac{BC}{EF}\right) = \left(\frac{AC}{DF}\right) \quad \text{-----(2)}$$

$\triangle ABL$  व  $\triangle DEM$  में

$$\angle B = \angle E \quad (1) \text{से}$$

$$\angle L = \angle M = \text{समकोण}$$

AA समरूपता गुणधर्म से  $\triangle ABL \sim \triangle DEM$

$$\left(\frac{AB}{DE}\right) = \left(\frac{AL}{DM}\right) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\triangle ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle DEF \text{ का क्षेत्रफल}} &= \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AL}{\frac{1}{2} \times EF \times DM} \\ &= \left(\frac{BC}{EF}\right) \left(\frac{AL}{DM}\right) \\ &= \left(\frac{AB}{DE}\right) \left(\frac{AB}{DE}\right) \quad \text{समी (2) व (3) से} \\ &= \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 \end{aligned}$$

नोट:- इसी प्रकार दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात

- (1) उनकी संगत उंचाईयों के वर्गों के समानुपाती होता है ।
- (2) उनके संगत शीर्ष लम्बों के वर्गों के समानुपाती होती है ।
- (3) उनकी संगत माध्यिकाओं के वर्गों के समानुपाती होता है ।
- (4) उनके संगत कोणों के समद्विभाजकों के वर्गों के समानुपाती होता है ।

प्र.  $\triangle ABC$  एक समकोण त्रिभुज है जहाँ  $\angle B = 90^\circ$  तथा D व E, AB व BC पर दो बिन्दु है सिद्ध करो ।  $AE^2 + CD^2 = AC^2 + DE^2$

हल- L.H.S. में समकोण  $\triangle AEB$  में

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 \quad \text{.....(1)}$$

तथा  $\triangle CDB$  में

$$CD^2 = BD^2 + BC^2 \quad \text{..... (2)}$$

(1) + (2) से

$$AE^2 + CD^2 = AB^2 + BE^2 + BD^2 + BC^2$$

R.H.S. के लिए

$$\triangle ABC \text{ में} \quad AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= a^2 + a^2$$

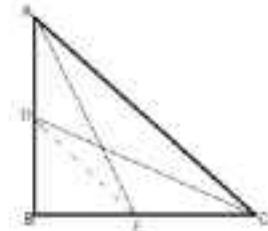
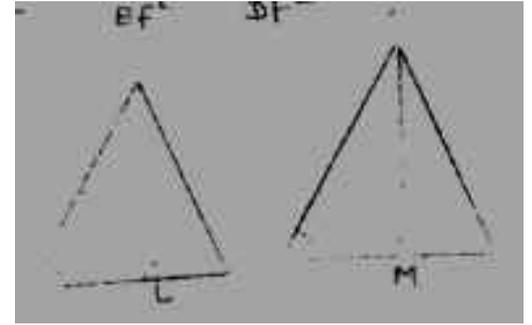
$$AC^2 = 2a^2$$

$$AC = a\sqrt{2}$$

भुजा AB पर बने समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

विकर्ण AC पर बने समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल



नोट:- यहाँ AE, CD, AC व DE समकोण  $\triangle$  के कर्ण है। बोधायन प्रमेय से इनके मान ज्ञात करके उपयुक्त पदों का योग करें

$$= \sqrt{\frac{3}{4}}(\sqrt{2a^2})$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}}(2a^2)$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)$$

विकर्ण AC पर बने त्रिभुज का क्षेत्रफल = 2 ( भुजा AB पर बने समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल )

महत्त्वपूर्ण प्रश्न-

प्र. दी गई आकृति में  $DE \parallel BC$  है यदि  $AD = x$ ,  $DB = Y-2$ ,  $AE = X + 2$ ,  $EC = X-1$  है। तो X का मान ज्ञात कीजिए।

हल  $\triangle ABC$  में  $DE \parallel BC$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय से}$$

$$\frac{X}{X-2} = \frac{X+2}{X-1}$$

$$X(X-1) = (X+2)(X-2)$$

$$X^2 - X = X^2 - 4$$

$$X = 4$$



प्र. एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण पर परस्पर बिन्दु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि  $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$  है तो सिद्ध करो ABCD एक समलम्ब

चक्र है।

हल दिया है।  $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

सिद्ध करना है। ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है।

अर्थात्  $AB \parallel CD$

रचना:- O से रेखाखण्ड  $OE \parallel AB$  खींचते हैं।

उपपत्ति:- दिया है।

$$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$$

या  $\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$  - (1) (एक विकर्ण के दोनों भाग)

$\triangle ABC$  में  $OE \parallel AB$

$$\frac{AO}{CO} = \frac{BE}{CE}$$

या  $\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$  - (2) (आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय से।)

(1) व (2) से  $\frac{BO}{DO} = \frac{BE}{CE}$

$DE \parallel CD$  (4) (आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय के विलोम से।)

तथा रचना से  $OE \parallel AB$  - (5)

(4) व (5) से  $AB \parallel CD$  इति सिद्धम्।

प्रश्न- आकृति ने OA, OB = OC, OD तो दर्शाए।  $\angle A = \angle C$  व  $\angle B = \angle D$

दिया है। OA, OB = OC, OD

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB} \quad (i)$$

तथा  $\angle AOD = \angle BOC$  - (iii)

सभी (1) व (2) से SAS समरूपता गुणधर्म से।

$\triangle AOD \sim \triangle BOC$

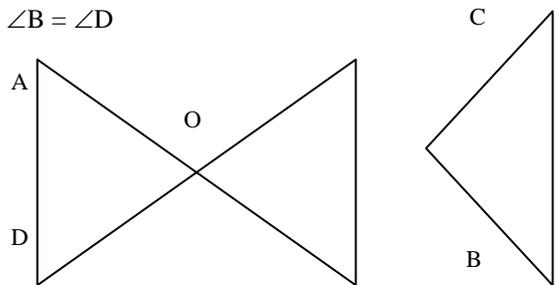
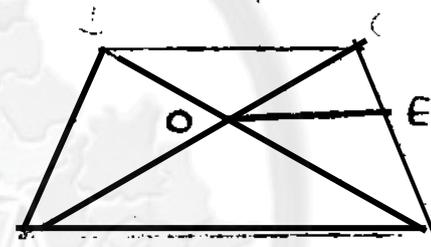
अतः  $\angle A = \angle C$  व  $\angle D = \angle B$

प्र. 90 Cm की लम्बाई वाली लड़की बल्ब लगे खम्बे के आधार से 1.2 मीटर/ सें. की चाल से चल रही है। यदि बल्ब भूमि से 3.6 मीटर की ऊंचाई पर हो तो 4 Sec. के बाद लड़की की छाया कितने मीटर होगी।

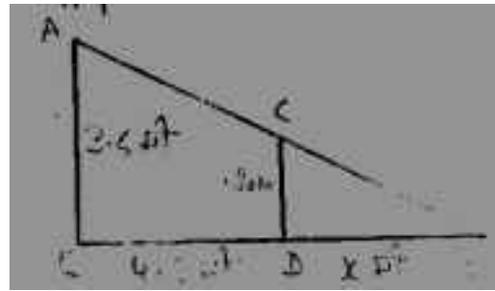
हल 1 Sec. में लड़की द्वारा तय दूरी = 1.2 मीटर

4 Sec. में लड़की द्वारा तय दूरी = 1.2 X 4 मीटर = 4.8 मीटर

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle CDE$



$$\begin{aligned} \therefore \frac{AB}{CD} &= \frac{BE}{DE} \\ \frac{3.6}{.9} &= \frac{4.8+x}{x} \\ 4x &= 4.8+x \\ 3x &= 4.8 \\ x &= \frac{4.8}{3} = 1.6 \text{ Mtr.} \end{aligned}$$



प्रश्न चित्र में x का मान व a व b के पदों में ज्ञात करो ।

हल- चित्रानुसार  $\angle A = \angle B = 50^\circ$

- तथा  $\angle ACB = \angle BCD$  उभयनिष्ठ

AA समरूपता गुणधर्म से

$$\frac{AE}{BD} = \frac{AC}{BC}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{b+c}{c}$$

$$x = \frac{ac}{b+c}$$

प्र. समरूप त्रिभुजों में भुजाओं का अनुपात 4:9 है तो क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात करो ।

हल समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात = (भुजाओं का अनुपात)<sup>2</sup>

$$= \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

प्र. समरूप त्रिभुजों का उंचाईयों का अनुपात 2 : 3 है तो क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात करो ।

हल समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात = (उंचाईयों का अनुपात)<sup>2</sup>

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

प्र.  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  तथा इनके क्षेत्रफलों का अनुपात 64 : 121 तथा  $EF = 15.4 \text{ Cm}$  है तो  $BC$  ज्ञात करो ।

∴ समरूप  $\triangle$  का क्षेत्रफलों का अनुपात = भुजाओं के वर्गों का अनुपात

$$\frac{\triangle ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2$$

$\triangle DEF$  का क्षेत्रफल

$$\frac{61}{121} = \left(\frac{BC}{15.4}\right)^2 \text{ (वर्ग हटाने पर)}$$

$$\frac{8}{11} = \frac{BC}{15.4}$$

$$BC = \frac{8 \times 15.4}{11} = 11.2 \text{ सेमी.}$$

प्र.  $\triangle ABC$  में  $DE \parallel BC$  एवम्  $AD : DB = 2 : 3$  हो तो  $\triangle ADE$  व  $\triangle ABC$  के क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात करो ।

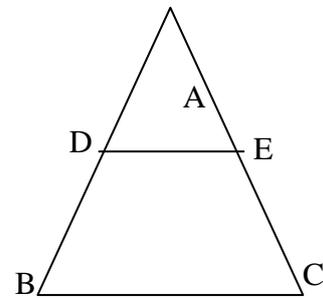
$$\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{DB}{AD} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{3}{2} + 1$$

$$\frac{DB + AD}{AD} = \frac{3 + 2}{2}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{5}{2} \text{ समरूप } \frac{\triangle ADE}{\triangle ABC} \text{ का क्षेत्रफल} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

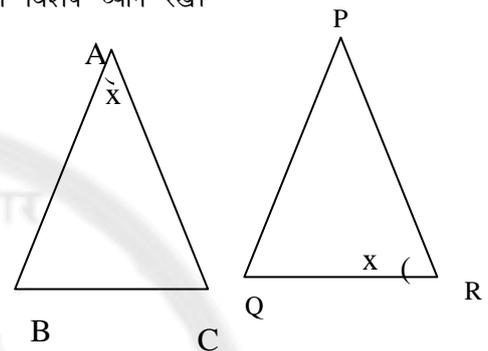


**ध्यान देने योग्य तथ्य**

- A.** दो त्रिभुजों को सर्वांगसम करने के लिए निम्नलिखित बिन्दुओं पर ध्यान देना आवश्यक है ।
- (1) दोनों त्रिभुजों में जो अवयव (भुजा व कोण) समान दिए गये हैं, उन्हें बराबर के रूप में लिखें ।
  - (2) यदि दोनों त्रिभुजों में कोई उभयनिष्ठ भुजा हो तो, उन्हें बराबर के रूप में लिखें ।
  - (3) यदि दोनों त्रिभुजों में कोई उभयनिष्ठ कोण हो, तो उन्हें बराबर के रूप में लिखें ।
  - (4) उपरोक्त क्रिया के पश्चात् अन्य कोई भुजा या कोण समान है तो उन्हें बराबर लिख दें ।  
तत्पश्चात् निम्न गुणधर्मों में उपयुक्त गुणधर्म का चयन कर दोनों त्रिभुजों को सर्वांगसम करें ।
- (i) भुजा - भुजा - भुजा (SSS)
  - (ii) भुजा - कोण - भुजा (SAS)
  - (iii) कोण - भुजा - कोण (ASA)
  - (iv) कोण - कोण - भुजा (ASA)
  - (vi) समकोण- कर्ण - भुजा (RHS)

**B.** सर्वांगसम करते समय त्रिभुजों के अवयवों की संगतता का विशेष ध्यान रखें।

- (i) जिन कोणों को बराबर सिद्ध किया है।  
उन्हें त्रिभुजों के नामकरण में पहले लिखें ।  
जैसे  $\angle A = \angle R$  है तो त्रिभुजों के नामकरण में A व R पहले लिखें ।
- (ii)  $AB = PR$  है तो AB के सामने C कोण व PR के सामने Q कोण को द्वितीय स्थान पर लिखें।
- (iii) अब शेष बचे शीर्ष को लिख दें ।



अर्थात्  $\triangle ACB \cong \triangle RQP$

समरूपता:- दो त्रिभुज  $\triangle PQR$  में यदि ।

$$\begin{aligned} \angle A &= \angle Q && - && (i) \\ \angle B &= \angle R && - && (ii) \\ \angle C &= \angle P && - && (iii) \end{aligned}$$

समरूप इस प्रकार लिखें ।

$$\begin{array}{ccc} \triangle ABC & \sim & \triangle QRP \\ 1 & 2 & 3 \quad 1 & 2 & 3 \end{array}$$

इनकी भुजाओं के अनुपात भी इसी क्रम में लिखें ।

जैसे  $\triangle ABC \sim \triangle QRP$

$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{RP} = \frac{AC}{QP}$$

**समरूपता व सर्वांगसमता में भिन्नता ।**

- (i) समरूपता में भुजाओं का अनुपात समान होता है ।  
जबकि सर्वांगसमता में संगत भुजाओं का नाप समान रहत है ।
- (ii) प्रत्येक सर्वांगसम त्रिभुज समरूप होते हैं। परन्तु सभी समरूप त्रिभुजों का सर्वांगसम होना आवश्यक नहीं होता है ।

**प्रमेय को हल करते समय निम्न पदों पर ध्यान दें ।**

1. दिया है:- प्रमेय के कथन में दिये गये प्रतिबन्ध या चित्र के बारे में आवश्यक हिस्सा लिखें ।
2. सिद्ध करना है:- प्रमेय के कथन में जो पूछा गया है उसे गणितीय रूप में लिखें ।
3. रचना:- आवश्यकता अनुसार रचना करें ।
4. उपपत्ति:- दिये गये प्रतिबन्ध व रचना से मिलने वाले पदों को क्रमानुसार लिखें व इनसे उपयुक्त हल प्राप्त करें ।

## अध्याय - 12

### वृत्त

**महत्त्वपूर्ण बिन्दु:-**

1. वृत्त किसी तल में उन बिन्दुओं का बिन्दुपथ होता है जो तल में एक स्थिर बिन्दु से समान दूरी पर रहते हैं ।
2. स्थिर बिन्दु वृत्त का केन्द्र व नियत दूरी वृत्त की त्रिज्या कहलाती है।
3. वृत्त पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाखण्ड वृत्त की जीवा कहलाता है ।
4. वृत्त की जीवा वृत्त को दो भागों में विभाजित करता है।  
(i) लघु वृत्त खण्ड (ii) दीर्घवृत्त खण्ड
5. इन वृत्त खण्डों के संगत चाप  
(i) लघु चाप (ii) दीर्घ चाप
6. लघुचाप का डिग्री माप  $180^\circ$  से कम व दीर्घचाप का डिग्री चाप  $180^\circ$  से ज्यादा होता है ।
7. तीन बिन्दुओं (असंरेखीय) से गुजरने वाला केवल एक वृत्त होता है।

**कुछ महत्त्वपूर्ण प्रमेय**

**प्रमेय - सिद्ध कीजिये की वृत्त के केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है**

(1) दिया है - एक वृत्त जिसका केंद्र O है | जीवा AB है तथा  $OM \perp AB$  है

(2) सिद्ध करना है -  $AM = BM$

(3) रचना - केंद्र O बिन्दु A व B से मिलाया |

(4) उपपत्ति - त्रिभुज OMA तथा त्रिभुज OMB में

भुजा OA = भुजा OB (

चकि एक ही वृत्त की त्रिज्याये है  $\angle AMO = \angle BMO$

( दोनों समकोण है चूंकि  $OM$

| AB ) भुजा OM = भुजा OM ( उभयनिष्ठ है )

अतः त्रिभुज OMA  $\cong$  त्रिभुज OMB

अतः  $\triangle OMA \cong \triangle OMB$

$$AM = BM$$

इति सिद्धम्

**प्रमेय-** समान जीवाएँ केन्द्र से समान दूरी पर होती है ।

(i) दिया है । जीवा AB व CD समान है।  $AB = CD$

(ii) सिद्ध करना है ।  $OM = ON$

(iii) रचना:- O को B व C से मिलाते हैं।

(iv) उपपत्ति:- दिया है ।  $AB = CD$

$$\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$$

$$BM = CN - (1)$$

$$OB = OC \text{ (वृत्त की त्रिज्या)} - (2)$$

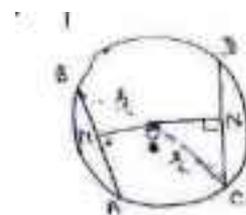
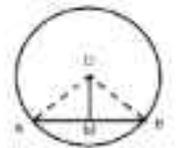
$$\angle ONC = \angle OMB = 90^\circ - (3)$$

अतः RHS गुणधर्म से  $\triangle OMB \cong \triangle ONC$

$$OM = ON$$

इति सिद्धम्

**प्रमेय - वृत्त के किसी चाप द्वारा केंद्र पर अंतरिक कोण , उसी चाप द्वारा परिधि के किसी बिन्दु पर अंतरिक कोण का दो गुना होता है।**



1. दिया है - एक वृत्त जिसका केंद्र 'O' है। चाप AB द्वारा केंद्र 'O' पर अंतरिक कोण AOB तथा परिधि के बिन्दु C पर अंतरिक कोण ACB है।
2. सिद्ध करना है -  $\angle AOB = 2\angle ACB$
3. रचना - CO को मिलाते हुए आगे तक बढ़ाया तथा कोणों को चित्रानुसार नामांकित किया उपपत्ति - त्रिभुज AOC में

$$\text{भुजा } AO = \text{भुजा } OC \quad (\text{एक ही वृत्त की त्रिज्याये})$$

$$\text{अतः} \quad \angle OAC = \angle OCA = x$$

चूंकि किसी त्रिभुज का बहिष्कोण, अंतराभिमुख कोण के योग के बराबर होता है।

$$\angle AOE = x + x = 2x \dots\dots(1)$$

इसी प्रकार त्रिभुज OBC में

$$\text{भुजा } OB = \text{भुजा } OC$$

$$\angle OBC = \angle OCB = y$$

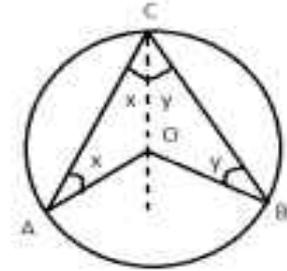
$$\text{अतः} \quad \angle BOE = y + y = 2y \dots\dots(2)$$

सामी. (1) और (2) को जोड़ने पर

$$\angle AOE + \angle BOE = 2x + 2y$$

$$\angle AOB = 2(x + y)$$

$$\angle AOB = 2\angle ACB$$



इति सिद्धम्

trick - इस प्रमेय को संक्षेप में इस प्रकार भी सिद्ध किया जा सकता है।

उपपत्ति - त्रिभुज AOC में

$$\text{भुजा } OA = \text{भुजा } OC \quad (\text{एक ही वृत्त की त्रिज्याये})$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA = x$$

किसी त्रिभुज का बहिष्कोण, उसके अंतराभिमुख कोणों के बराबर होता है

$$\therefore \angle AOB = \angle OAC + \angle OCA$$

$$= x + x$$

$$= 2x$$

$$\angle AOB = 2\angle ACB$$

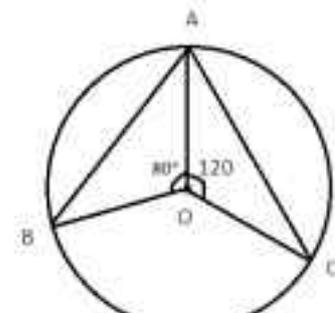
Ex. दी गई आकृति में चाप AB और AC द्वारा केंद्र पर अन्तरित कोण क्रमशः  $80^\circ$  तथा  $120^\circ$  हैं। कोण BAC तथा BOC ज्ञात करो

$$\text{हल} \quad \angle BOC = 360 - (80^\circ + 120^\circ)$$

$$= 160^\circ$$

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$$

$$= \frac{1}{2} \times 160^\circ = 80^\circ$$

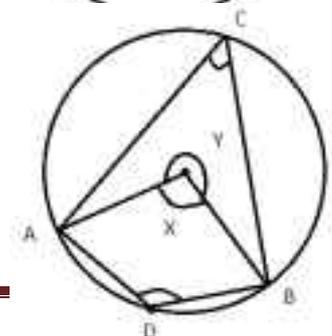


प्रमेय - चक्रीय चतुर्भुज के अभिमुख कोण संपूरक होते हैं

(1) दिया है - ADBC एक चक्रीय चतुर्भुज है।

(2) सिद्ध करना है -

$$\angle C + \angle D = 180^\circ$$



$$\text{या } \angle A + \angle B = 180^\circ$$

(3). रचना - वृत्त के केंद्र O को बिन्दु A तथा B से मिलाया।

(4). उपपत्ति - हम जानते हैं की वृत्त के किसी चाप द्वारा , परिधि के किसी बिन्दु बना कोण , उसी चाप द्वारा बने कोण का दोगुना होता है।

चूंकि चाप AB द्वारा केंद्र पर बना कोण  $\angle AOB = x$  तथा परिधि के बिन्दु पर बना कोण C है।

$$\text{अतः } \angle C = \frac{1}{2}x^\circ \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{इसी प्रकार } \angle D = \frac{1}{2}y^\circ \dots\dots\dots(2)$$

समी. (1) तथा (2) को जोड़ने पर

$$\angle C + \angle D = \frac{1}{2}[x + y]$$

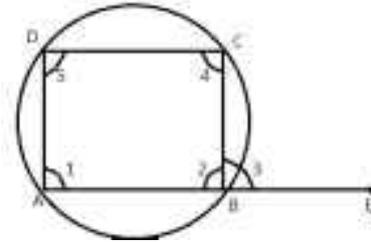
चूंकि केंद्र पर बने सभी कोणो का योग  $360^\circ$  होता है

$$\text{अतः } x + y = 360^\circ$$

$$\angle C + \angle D = \frac{1}{2}(360) = 180^\circ$$

चूंकि चतुर्भुज के चारो कोणो का योग 360 होता है।

$$\text{अत } \angle A + \angle B = 360 - 180 = 180$$



प्रमेय - चक्रीय चतुर्भुज की एक भुजा बढ़ाने पर बनाने वाला बहिष्कोण उसके अंतराभिमुख कोण के बराबर होता है।

दिया है - एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD जिसकी भुजा AB को E तक आगे बढ़ाया गया है। इस प्रकार बना बहिष्कोण  $\angle 3$  है

$$\text{सिद्ध करना है - } \angle CBE = \angle CDA$$

$$\text{या } \angle 3 = \angle 5$$

$$\text{उपपत्ति - } \angle 2 + \angle 3 = 180 \dots\dots\dots(1)$$

चक्रीय चतुर्भुज के अभिमुख कोण संपूरक ( $180^\circ$ ) होते हैं।

$$\angle 2 + \angle 5 = 180^\circ \dots\dots\dots(2)$$

समी. (1) व (2) की तुलना करने पर

$$\angle 2 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 5$$

$$\text{या } \angle 3 = \angle 5$$

बहिष्कोण = अंतराभिमुख कोण

प्र. AB और CD वृत्त की दो जीवाएँ इस प्रकार है कि  $AB = 10$  सेमी,  $CD = 24$  सेमी और  $AB \parallel CD$  है। AB व CD के बीच की दूरी 17 सेमी. है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।

हल:- दिया है ।  $MN = 17$  cm

$$\text{माना } ON = X$$

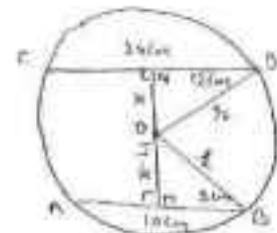
$$OM = 17 - X$$

$$\triangle OND \text{ में } r^2 = x^2 + 12^2 \quad \text{---(1)}$$

$$\triangle OMB \text{ में } r^2 = (17-x)^2 + 5^2 \quad \text{---(2)}$$

(1) में से (2) घटाने पर

$$\text{या } x^2 - (17-x)^2 + 12^2 - 5^2 = 0$$



$$\text{या } x^2 - (289 + x^2 - 34x) + 144 - 25 = 0$$

$$\text{या } 34x = 170$$

$$x = \frac{170}{34} = 5\text{cm}$$

$$x \text{ का मान (1) में रखने पर } R^2 = 5^2 + 12^2 = 169$$

$$R^2 = 13^2$$

$$R = 13\text{cm}$$

प्र. आकृति में AOB वृत्त का व्यास है तथा C, D और E अर्धवृत्त पर कोई तीन बिन्दु है।  $\angle ACD + \angle BED$  का मान ज्ञात करो।

हल:- A को E से मिलाने पर।

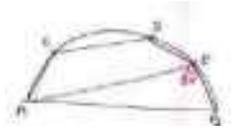
$$\angle AEB = 90^\circ \quad - (1) \quad (\text{अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है।})$$

तथा  $\angle ACD + \angle AED = 180^\circ - (2)$  (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण।)

(1) + (2) से

$$\angle ACD + \angle AED + \angle AEB = 180^\circ + 90^\circ$$

$$\angle ACD + \angle BED = 270^\circ$$



प्रश्न:- ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। X और Y ज्ञात करो।

हल- चित्रानुसार

$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

$$X + 10 + 5y + 5 = 180^\circ$$

$$x + 5y + 15 = 180^\circ$$

$$x + 5y + 165^\circ \quad \text{----- (1)}$$

तथा  $\angle B + \angle D = 180^\circ$

$$2x + 4 + 4y - 4 = 180^\circ$$

$$2x + 4y = 180^\circ$$

$$x + 2y = 90^\circ$$

(1) व (2) से  $x = 40^\circ$ ,  $Y = 25^\circ$  ----- (2)

प्रश्न- यदि P, Q, R त्रिभुज ABC की भुजा BC, CA तथा AB भुजाओं के मध्य बिन्दु है तथा AD, शीर्ष A से BC पर लम्ब है। सिद्ध करो। PQR D एक चक्रीय चतुर्भुज है।

हल:- RQPB समान्तर चतुर्भुज है।

$$\therefore \angle PQR = \angle B - (1)$$

तथा समकोण  $\triangle ABD$  में R, कर्ण का

मध्य बिन्दु है।

$$AR = RD$$

$$\angle RAD = \angle RDA = X \quad (2)$$

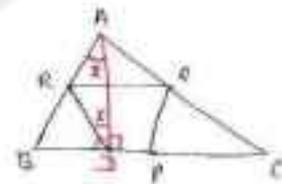
चतुर्भुज RQPD में सम्मुख कोण।

$$\angle RDP + \angle RQP = x + 90^\circ + B$$

$$= x + B + 90^\circ$$

$$= 90^\circ + 90^\circ$$

$$= 180^\circ \text{ सम्मुख कोण सम्पूरक है अतः } PQRD \text{ एक चक्रीय चतुर्भुज है।}$$



Note:  $\triangle ABD$  में

$$x + \angle B + 90^\circ = 180^\circ$$

$$x + \angle B = 90^\circ$$

## अध्याय - 13

## वृत्त एवं स्पर्श रेखाएँ

अतिलघुरात्मक 1 प्रश्न (1 अंक)

स्मरण रखने हेतु महत्वपूर्ण प्रश्न

1. एक वृत्त पर कितनी स्पर्श रेखाएँ खिंची जा सकती हैं ?

उत्तर - अनंत

2. एक वृत्त पर स्थित बिन्दु से कितनी स्पर्श रेखाएँ खिंची जा सकती हैं ?

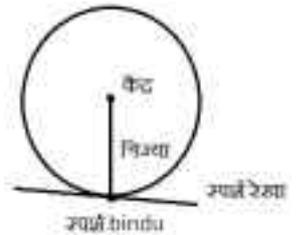
उत्तर - एक

3. वृत्त के दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को क्या कहते हैं ?

उत्तर - छेदकरेखा

4. वृत्त की त्रिज्या स्पर्श रेखा के लंबवत होती है ।

उत्तर - परस्पर  $90^\circ$  का कोण बनती है।



5. वृत्त तथा स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिन्दु को क्या कहते हैं ?

उत्तर - स्पर्श बिन्दु

6. वृत्त की स्पर्श रेखा वृत्त से कितने बिन्दुओं पर मिलती है ?

उत्तर - एक

7. एक बिन्दु से वृत्त पर खिंची गई स्पर्श रेखा की लंबाई ज्ञात कीजिये, जबकि बिन्दु की वृत्त के केंद्र से दूरी 13 सेमी. है और वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी. है

उत्तर - त्रिभुज OAP एक समकोण त्रिभुज है

बोधायन प्रमेय से

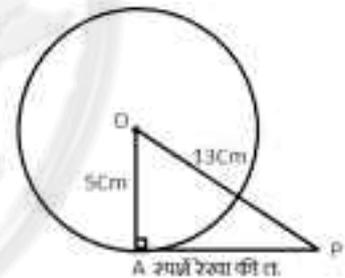
$$(\text{कर्ण})^2 = (\text{लंब})^2 + (\text{आधार})^2$$

$$(OP)^2 = (OA)^2 + (AP)^2$$

$$AP^2 = (OP)^2 - (OA)^2$$

स्पर्श रेखा की लंबाई

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{(OP)^2 - (OA)^2} \\ &= \sqrt{(13)^2 - (5)^2} \\ &= \sqrt{169 - 25} \\ &= \sqrt{144} \\ &= 12 \text{ सेमी.} \end{aligned}$$



नोट - इसी तरह यदि त्रिज्या एवं वृत्त के केंद्र से बाह्य बिन्दु की दूरी भी ज्ञात कर सकते हैं।

8. वृत्त के बाहर बिन्दु से वृत्त पर कितनी स्पर्श रेखाएँ खिंची जा सकती हैं ?

उत्तर - दो

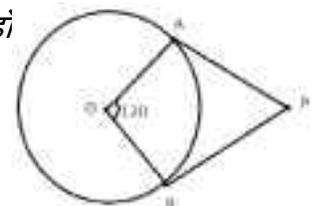
9. किसी वृत्त पर बाह्य बिन्दु से खिंची गई स्पर्श रेखाओं के मध्य बना कोण उसी स्पर्श

बिन्दुओं से गुजरने वाली त्रिज्याओं के मध्य बने कोण के संपूरक है।

उत्तर -  $\angle AOB + \angle APB = 180^\circ$

$$\angle APB = 180^\circ - \angle AOB$$

$$= 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$



10. दो संकेद्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 5 सेमी. तथा 3 सेमी. हैं बड़े वृत्त की उस जीवा की

लंबाई जात कीजिये जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती है

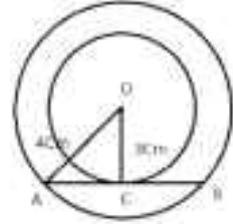
उत्तर - वृत्त का केंद्र, 3 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त की स्पर्श रेखा/बड़े वृत्त की जीवा OC  $\perp$  AB  
त्रिभुज ACO एक समकोण त्रिभुज है।

बोधायन प्रमेय  $OA^2 = OC^2 + AC^2$

$$AC = \sqrt{OA^2 - OC^2}$$

$$= \sqrt{(5)^2 - (3)^2}$$

$$= \sqrt{25 - 9} = 4 =$$



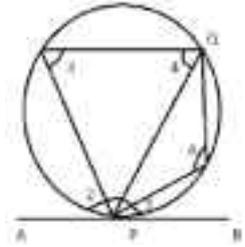
11. यदि वृत्त की स्पर्श रेखा के स्पर्श बिन्दु से एक जीवा खींची जाय तो इस जीवा द्वारा दी गई स्पर्श रेखा से बनाए गए कोण क्रमशः उसी जीवा द्वारा एकांतर वृत्तखंडों में बने कोण के बराबर होता है।

AB = वृत्त की स्पर्श रेखा

PQ = जीवा

$$\angle 1 = \angle 3$$

$$\angle 2 = \angle 4$$



प्रमेय - वृत्त के बाहर स्थित बिन्दु से वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाएँ लंबाई में समान होती हैं।

(1) दिया है - एक वृत्त जिसका केंद्र O पर बाह्य बिन्दु P से PA तथा PB स्पर्श रेखाएँ खींची गई हैं।

(2) सिद्ध करना है -  $PA = PB$

रचना - OA, OB, तथा OP को मिलाया

उपपत्ति - समकोण त्रिभुज OAP तथा त्रिभुज OBP में -

भुजा OA = भुजा OB

(एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

भुजा OP = भुजा OP

( उभयनिष्ठ )

$\angle OAP = \angle OBP$

( दोनों समकोण हैं )

अतः  $\triangle OAP \cong \triangle OBP$

भुजा AP = भुजा BP

इति सिद्धम्

EX. एक वृत्त त्रिभुज ABC की भुजा BC को P पर स्पर्श करता है तथा AB व AC को आगे बढ़ाने पर क्रमशः Q व R पर स्पर्श करता है तो सिद्ध कीजिये की

$$AQ = \frac{1}{2} (\text{त्रिभुज ABC की परिमति})$$

हल - हम जानते हैं की किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ लंबाई में समान होती हैं।

अतः  $AQ = AR$

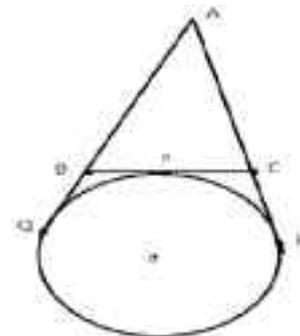
इसी प्रकार  $BQ = BP$  तथा  $CP = CR$  ----- (1)

अब R.H. S.  $= \frac{1}{2} [AB + BC + CA]$

$$= \frac{1}{2} [AQ - BQ + BP + CP + AR - CR]$$

$$= \frac{1}{2} [AQ - BP + BP + CR + AQ - CR]$$

$$= \frac{1}{2} [2AQ] = AQ = L.H.S.$$



## अध्याय - 14

## रचनाएँ

इस अध्याय से 3 अंक का एक प्रश्न आता है

1. वृत्त के बाहर स्थित किसी बिन्दु से स्पर्श रेखा खींचना -

विधि - (1) सर्वप्रथम दी गई त्रिज्या का वृत्त बनाइये।

(2) वृत्त के केंद्र से दी गई माप का रेखाखण्ड OP खींचिए।

(3) OP रेखा का लम्ब अर्द्धक करके OP का मध्य बिन्दु M ज्ञात कीजिये। अब M को केंद्र मानकर और OM को त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचिए जो पहले को दो जगह प्रतिच्छेद करेगा। इनको A व B नाम दीजिये .

(4) AP तथा BP को मिलाये यही दो स्पर्श रेखाएँ हैं जो मापने पर बराबर होंगी

Ex. 1 एक 3 Cm त्रिज्या का वृत्त खींचिए जिनके केंद्र O से 5 Cm दूर स्थित बिन्दु P से दो स्पर्श रेखाएँ खींचिए?

चित्रानुसार  $OA = \text{त्रिज्या} = 3 \text{ Cm}$

$OP = 5 \text{ Cm}$

स्पर्श रेखा की लंबाई की गणना द्वारा सत्यापन

$$\therefore \angle OAP = 90^\circ$$

समकोण त्रिभुज OAP में  $AP^2 = OP^2 - OA^2$

$$= (5)^2 - (3)^2$$

$$= 25 - 9 = 16$$

$$AP = \sqrt{16} = 4 \text{ Cm}$$

अतः स्पर्श रेखा

$$AP = BP = 4 \text{ Cm}$$

(3) वृत्त पर ऐसी दो स्पर्श रेखाएँ खींचना, जिनके मध्य का कोण दिया गया हो -

विधि - (1) सर्वप्रथम दी गई त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए।

(2) स्पर्श रेखाओं के मध्य जितना कोण दिया गया है उसे  $180^\circ$  में घटाकर, जो आये उतने डिग्री का वृत्त के केंद्र O पर कोण बनाते हुए त्रिज्या OA व OB खींचे।

(3) वृत्त की परिधि पर स्थित बिन्दु A व B पर  $90^\circ$  के कोण बनाए और  $90^\circ$  के कोण को बिन्दु A से तथा B से मिलाते हुए आगे बढ़ते हैं, जंहा मिले वहा बिन्दु P अंकित करे।

$\angle APB$  बांछित कोण होगा तथा PA, PB स्पर्श रेखाएँ।

Ex. किसी बिन्दु O पर 2.4 Cm त्रिज्या लेकर वृत्त बनाइये इसमें  $60^\circ$  का कोण बनती हुई दो स्पर्श रेखाएँ खींचिए।

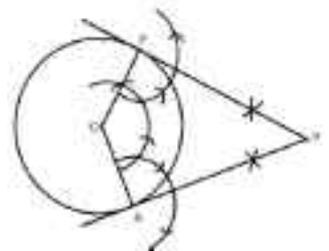
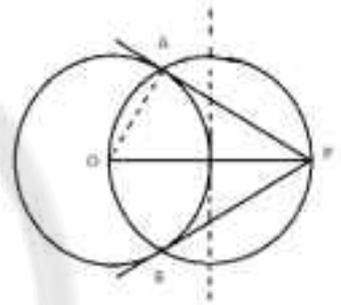
(4) त्रिभुज के परिकेन्द्र की स्थिति एवं परिगत वृत्त की रचना।

परिकेन्द्र - किसी त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब अर्द्धक का सगमन बिन्दु परिकेन्द्र कहलाता है।

विधि - (1) सर्वप्रथम प्रश्न में दी गई माप के आधार पर त्रिभुज की रचना कीजिये।

(2) अब त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का लम्ब समद्विभाजन करो जहाँ दोनों भुजाओं के लम्ब अर्द्धक मिले वह परिकेन्द्र O होगा।

(3) O को केंद्र मानकर, OA को त्रिज्या मानकर वृत्त खींचिए जो त्रिभुज के तीनों शीर्षों से होकर गुजारेगा।



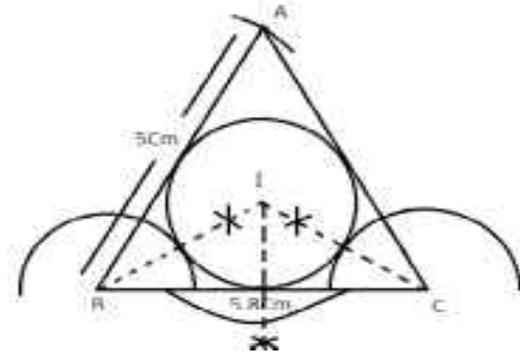
Trick - परिगत अर्थात जो बाहर से गुजरे अतः बाहर की भुजाओ का लम्ब अर्द्धक करो। अंदर कोण होते है जिनके अर्द्धक का संगमन बिन्दु अंतः केंद्र कहलाता है। अतःकेंद्र को केंद्र मानकर खिचा गया वृत्त अंतर्गत वृत्त कहलाता है। जो त्रिभुज की भुजाओ को अंदर से स्पर्श करता है।

Ex. त्रिभुज ABC के अंतर्गत वृत्त की रचना कीजिये , जबकि

$$BC = 5.8\text{Cm}$$

$$AB = 5\text{Cm}$$

$$\angle B = 60^\circ$$



## वृत्त की परिधि एवं क्षेत्रफल (Circumference of a Circle and Area)

हम विभिन्न आकृतियों जैसे त्रिभुज, वर्ग, आयत, समान्तर चतुर्भुज आदि के परिमाण एवं क्षेत्रफल ज्ञात करने की विभिन्न विधियों का अध्ययन कर चुके हैं। इस अध्याय में कुछ वृत्ताकार आकृतियों के परिमाण एवं क्षेत्रफल से सम्बन्धित जानकारी प्राप्त करेंगे। हम दैनिक जीवन में अनेक वृत्ताकार आकृतियों जैसे चूड़ी (Bangles) सिक्का, चपाली, वृत्ताकार रास्ते आदि के सम्पर्क में आते हैं। अतः इन आकृतियों के क्षेत्रफल (विशेषकर वृत्तखण्ड, त्रिज्यखण्ड) एवं उनके परिमाण से सम्बन्धित विभिन्न समस्याओं को हल करने की कुछ विधियों का अध्ययन हम इस अध्याय में करने का प्रयास करेंगे।

### वृत्त की परिधि:

वृत्त किसी बिन्दु का बिन्दु पथ होता है जो किसी समतल में इस प्रकार गति करता है कि समतल में स्थित किसी नियत बिन्दु से इसकी दूरी सदैव समान रहे।

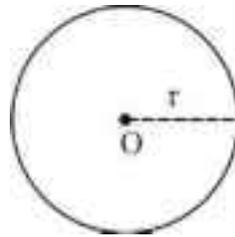
नियत बिन्दु, वृत्त का केन्द्र कहलाता है जबकि नियत (समान) दूरी (केन्द्र से) वृत्त की त्रिज्या कहलाती है। जिसे  $r$  से व्यक्त करते हैं।

वृत्त के अनुदिश एक पूरे चक्कर में तय की गई दूरी को वृत्त की परिधि कहते हैं।

ध्यान रहे वृत्त समतल में बनी आकृति है जबकि वृत्त की परिधि एक लम्बाई है।

वृत्त की परिधि व व्यास का अनुपात एक अचर राशि होती है जिसे  $\pi$  द्वारा व्यक्त किया जाता है।

$$\pi = \frac{\text{वृत्त की परिधि}}{\text{व्यास}} = \frac{C}{2r} \Rightarrow \boxed{C = 2\pi r}$$



याद रखने की ज़रूरत

“चल मेरे घोड़ा चल मेरे यार, वृत्त की परिधि  $2\pi r$ ”

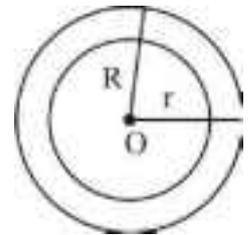
अतः यदि किसी वृत्त की त्रिज्या  $r$  हो तब —

(1) परिधि =  $2\pi r$  या  $\pi d$  यहाँ  $d = 2r$ , वृत्त का व्यास है।

(2) वृत्त का क्षेत्रफल (A) =  $\pi r^2$

(3) अर्द्ध वृत्त का (Semi circle) क्षेत्रफल =  $\frac{\pi r^2}{2}$

(4) वृत्त के एक चतुर्थांश का क्षेत्रफल =  $\frac{\pi r^2}{4}$



दो संकेन्द्रीय वृत्तों द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल

(Area Enclosed by Two Concentric Circles)

ऐसे वृत्त जिसका केन्द्र एक ही हो, संकेन्द्रीय वृत्त कहलाते हैं। यदि  $R$  एवं  $r$  दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ हैं  $R > r$  तो दोनों वृत्तों द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R+r)(R-r)$$

### कुछ महत्वपूर्ण परिणाम (Some Useful Results)

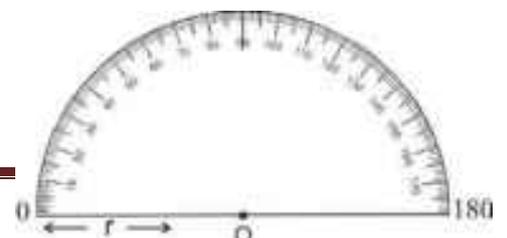
(1) किसी पहिये द्वारा एक बार घूमने में तय की गई दूरी, उसकी (पहिए) की परिधि/परिमाण के बराबर होती है।

(2) पहिए द्वारा 1 मिनट में लगाए गये चक्करों की संख्या =  $\frac{\text{एक मिनट में तय दूरी}}{\text{परिधि}}$

**उदाहरण 1 :** एक चाँदें (Semi-Circular Protector) का परिमाण 108 सेमी है। चाँदें का व्यास ज्ञात कीजिये।

**हल :** माना चाँदें की त्रिज्या  $r$  है, तब

$$\text{परिमाण} = 108$$



$$\Rightarrow \frac{1}{2}(2\pi r) + 2r = 108$$

$$\Rightarrow \pi r + 2r = 108$$

$$\frac{22}{7}r + \frac{2r}{1} = 108 \quad \Rightarrow \quad 36r = 108 \times 7 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{108 \times 7}{36} = 21 \text{ cm}$$

$$\text{अतः चाँदे का व्यास} = 2r = 2 \times 21 = 42 \text{ cm}$$

**उदाहरण 2 :** एक साइकिल का पहिया 11 किमी चलने में 5000 चक्कर लगाता है तो पहिये का व्यास ज्ञात कीजिए।

**हल :** पहिये द्वारा एक चक्कर में तय की गई दूरी अर्थात् परिधि =  $\frac{\text{चली गई दूरी}}{\text{चक्करों की संख्या}}$

$$\Rightarrow 2\pi r = \frac{11\text{KM}}{5000} = \frac{11 \times 1000 \times 100 \text{ cm}}{5000} \quad (1 \text{ किमी} = 1000 \text{ मी.})$$

$$(1 \text{ मीटर} = 100 \text{ सेमी})$$

$$\Rightarrow 2\pi r = 220 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow r = \frac{220}{2\pi} = \frac{220}{2 \times 22} \times 7 = 35 \text{ cm}$$

$$\text{व्यास} = 2r = 2 \times 35 = 70 \text{ cm} \quad (\text{व्यास} = 2 \times \text{त्रिज्या})$$

**वृत्त के त्रिज्यखण्ड एवं वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल**

किसी भी वृत्त की दो त्रिज्याओं और एक चाप से घिरे हुए क्षेत्र को वृत्त का त्रिज्यखण्ड कहते हैं।

माना दिये गये चित्रानुसार एक वृत्त है जिसका केन्द्र 'O' एवं त्रिज्या  $r$  है। माना A, B और C तीन बिन्दु वृत्त की परिधि पर हैं। यह वृत्त दो त्रिज्यखण्डों, OBA और OBCA में विभाजित है। इनमें प्रत्येक त्रिज्यखण्ड के लिए अलग-अलग चाप, सीमा के रूप में हैं। त्रिज्यखण्ड OBA के लिए चाप AB तथा OBCA के लिए चाप ABC है। लघु त्रिज्यखण्ड OBA के लिए माना  $\angle AOB = \theta$ , जब कोण  $\theta$  का मान बढ़ता है तो चाप की लम्बाई भी उसी अनुपात में बढ़ेगी। जब यह  $\theta$ ,  $180^\circ$  का हो जायेगा तो चाप AB, अर्द्धवृत्त की परिधि होगी। अर्थात् चाप AB की लम्बाई =  $\frac{1}{2}$  (परिधि)

$$\therefore \text{केन्द्र पर } 180^\circ \text{ का कोण अन्तरित करने वाले चाप की लम्बाई} = \pi r$$

$$\therefore \text{केन्द्र पर } \theta \text{ कोण अन्तरित करने वाले चाप की लम्बाई} = \frac{\pi r}{180} \theta$$

$$\text{अर्थात् } L = \frac{\theta}{180} (\pi r)$$

$$\text{या } L = \frac{\pi}{180} \times \frac{2\pi r}{2} = \frac{\theta}{360} (\text{परिधि})$$

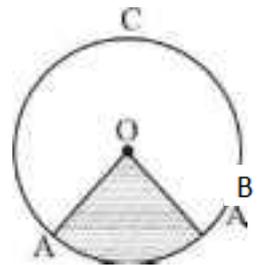
इसी प्रकार चाप जब  $180^\circ$  का कोण बनाता है तो संगत त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} (\text{वृत्त का क्षेत्रफल}) = \frac{\pi r^2}{2}$$

$$\therefore \theta \text{ कोण अन्तरित करने पर त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल} = \frac{\pi r^2}{2 \times 180} \theta$$

$$\text{या } A = \frac{\theta}{360} (\text{वृत्त का क्षेत्रफल})$$

$$\text{अब } A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$



$$\text{या } A = \frac{1}{2} \left( \frac{\theta}{180} \times \pi r \right) r$$

$$\text{या } A = \frac{1}{2} \ell r \quad \dots\dots \text{(iii)} \quad [\text{using eq (1)}]$$

### Some Useful Results to Remember

- (1) घड़ी के मिनट की सूई 60 मिनट में  $360^\circ$  के कोण से घूमती है।  
घड़ी के मिनट की सूई 1 मिनट में  $6^\circ$  के कोण से घूमेगी।
- (2) घड़ी में घण्टे की सूई 12 घण्टे में  $360^\circ$  के कोण से घूमती है।  
घड़ी में घण्टे की सूई 1 घण्टे में  $30^\circ$  के कोण से घूमेगी।
- (3) क्षेत्रफल की इकाई सेमी<sup>2</sup> वर्ग मीटर (मी<sup>2</sup>) होती है।

घड़ी में घण्टे की सूई 1 मिनट में  $\frac{1^\circ}{2}$  के कोण से घूमेगी।

**उदाहरण 3:** त्रिज्या 21 सेमी. वाले वृत्त का चाप केन्द्र पर  $60^\circ$  का कोण अन्तरित करता है। ज्ञात कीजिए—

(1) चाप की लम्बाई

(2) चाप द्वारा बनाये गये त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

**हल :** चाप की लम्बाई  $\ell = \frac{2\pi r\theta}{360} = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times \frac{60}{360} = 22$  सेमी

चाप द्वारा बनाये गये त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल  $= \frac{\pi r^2 \theta}{360} = \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times \frac{60}{360} = 231$  सेमी

**उदाहरण 4:** चित्र में दो संकेन्द्रीय वृत्तों जिनकी त्रिज्यायें क्रमशः 7 सेमी एवं 3.5 सेमी के भागों को दर्शाया गया है।

छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

**हल :** छायांकित भाग का क्षेत्रफल त्रिज्यखण्ड OAB का क्षेत्रफल —

त्रिज्यखण्ड OCD का क्षेत्रफल

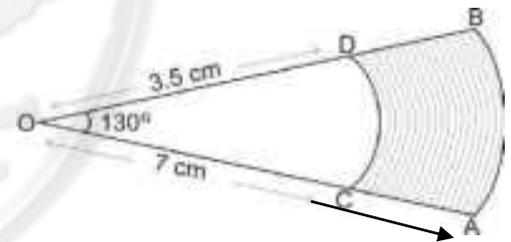
$$= \frac{\pi\theta}{360} [7^2 - 3.5^2]$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{30}{360} \left[ 7^2 - \left( \frac{7}{2} \right)^2 \right]$$

$$= \left[ 3.5 = \frac{7}{2} \right]$$

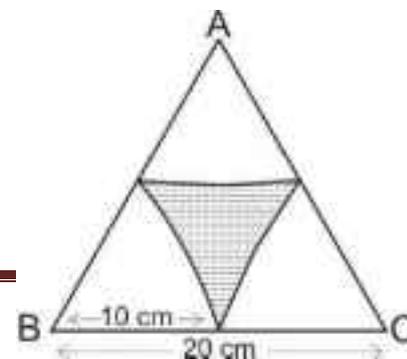
$$= \frac{22}{7} \times \frac{30}{360} \left[ 49 - \frac{49}{4} \right] = \frac{22}{7} \times \frac{30}{360} \times 49 \left[ 1 - \frac{1}{4} \right]$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{30}{360} \times 49 \times \frac{3}{4} = \frac{77}{8} = 9.625 \text{ cm}^2$$



**उदाहरण 5:** दी गई आकृति में ABC एक समबाहु त्रिभुज है। जिसकी एक भुजा 20 सेमी है। त्रिभुज के प्रत्येक शीर्ष से 10 सेमी. त्रिज्या के चाप खींचे गये हैं। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

**हल :** छायांकित भाग का क्षेत्रफल



समबाहु  $\triangle ABC$  का क्षेत्रफल – तीन त्रिज्यखण्डों का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ भुजा}^2 - 3 \left( \frac{\pi r^2 \theta}{360} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 20^2 - 3 \times \frac{22}{7} \times 10 \times 10 \times \frac{60}{360} \\ &= 173 - 157 \\ &= 16 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

(समबाहु  $\triangle$  का प्रत्येक अंतः कोण  $60^\circ$  होता है)

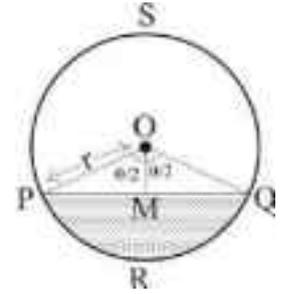
(समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल  $= \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ )

### वृत्तखण्ड (Segment) का क्षेत्रफल

वृत्त की प्रत्येक जीवा वृत्त को दो भागों में विभाजित करती है। बड़े भाग को दीर्घ वृत्तखण्ड व छोटे भाग को लघु वृत्तखण्ड कहते हैं।

चित्र से – यदि  $\angle POQ = \theta$  है

तब  $\angle POM = \angle QOM = \frac{\theta}{2}$



(1) लघु वृत्तखण्ड PRQ का क्षेत्रफल त्रिज्यखण्ड वृत्त का क्षेत्रफल – त्रिभुज POQ का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{1}{2} PQ \times OM \\ &= \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{1}{2} \times 2PM \times OM \end{aligned}$$

समकोण  $\triangle OMP$  से

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{PM}{OP} \Rightarrow \boxed{PM = OP \sin \frac{\theta}{2} = r \sin \frac{\theta}{2}}$$

$$\text{तथा } \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\text{आ}}{\text{कर्ण}} = \frac{OM}{OP} \Rightarrow OM = OP \cos \frac{\theta}{2} = r \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{लघु वृत्तखण्ड PRQ का क्षेत्रफल} &= \frac{\pi R^2 \theta}{360} - r \sin \frac{\theta}{2} \times r \cos \frac{\theta}{2} \\ &= \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{r^2}{2} \sin \theta \left[ \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right] \end{aligned}$$

**उदाहरण 6:** 14 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त की एक जीवा वृत्त के केन्द्र पर  $30^\circ$  का कोण बनाती है। इससे बनने वाले लघु वृत्तखण्ड एवं दीर्घ वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

$$\begin{aligned} \text{हल : (1) लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल} &= \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{r^2}{2} \sin \theta \\ &= \frac{22}{7} \times \frac{14 \times 14 \times 30^\circ}{360} - \frac{14 \times 14}{2} \sin 30^\circ \\ &= \frac{616}{12} - \frac{14 \times 14}{2} \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$51.33 - 49 = 2.33 \text{ cm}^2$$

(2) दीर्घ वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल त्र वृत्त का क्षेत्रफल - लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

$$= \pi r^2 - 2.33$$

$$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 - 2.33$$

$$= 616 - 2.33$$

$$= 613.67 \text{ cm}^2$$

**उदाहरण 7:** दी गई आकृति में ABCD एक आयत है। भुजा AB = 10 सेमी BC = 7 सेमी है। आयत के प्रत्येक शीर्ष पर 3.5 सेमी त्रिज्या के वृत्त खींचे गये हैं। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।



**हल :** छायांकित भाग का क्षेत्रफल

आयत ABCD का क्षेत्रफल - चारों शीर्षों पर बने वृत्तों के त्रिज्यखण्डों का क्षेत्रफल

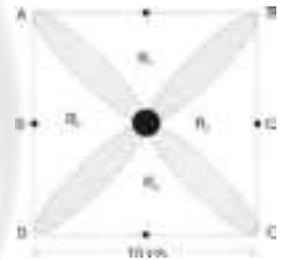
$$(10 \times 7) - 4 \frac{\pi r^2 \theta}{360} \quad (\text{आयत का क्षेत्रफल} = \text{ल} \times \text{चौ})$$

$$70 - 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times \frac{90}{360}$$

$$70 - 38.5 = 31.5 \text{ cm}^2 \quad (\because \text{आयत के प्रत्येक अन्तःकोण का मान } 90^\circ \text{ होता है})$$

**उदाहरण 8:** दी गई आकृति में छायांकित डिजाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये जहाँ

ABCD, भुजा 10 सेमी का एक वर्ग है तथा इस वर्ग की प्रत्येक भुजा को व्यास मानकर अर्द्धवृत्त खींचे गये हैं। ( $\pi = 3.14$  लें)



**हल :** सबसे पहले जो भाग छायांकित नहीं है, उसको  $R_1, R_2, R_3$  व  $R_4$  मान लेते हैं।

अब  $R_1$  का क्षेत्रफल +  $R_3$  का क्षेत्रफल

= वर्ग ABCD का क्षेत्रफल - Q व S को केन्द्र मानकर खींचे गये अर्द्ध वृत्तों का क्षेत्रफल

$$= \left[ 10 \times 10 - 2 \times \frac{1}{2} \times 3.14 \times 5^2 \right] \quad \left[ \because \text{Radius} = AP = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm} \right]$$

$$= (100 - 3.14 \times 25) = 100 - 78.5 = 21.5 \text{ cm}^2$$

इसी प्रकार  $R_2$  का क्षेत्रफल +  $R_4$  का क्षेत्रफल =  $21.5 \text{ cm}^2$

$\therefore$  छायांकित भाग का क्षेत्रफल

= वर्ग ABCD का क्षेत्रफल - ( $R_1$  का क्षेत्रफल +  $R_2$  का क्षेत्रफल +  $R_3$  का क्षेत्रफल +  $R_4$  का क्षेत्रफल)

$$= (100 - 2 \times 21.5) = 57 \text{ cm}^2$$

## अध्याय – 16

## पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन (Surface Areas and Volumes)

**प्रस्तावना (Introduction)** – ईंट, माचिस की डिब्बी, कमरा पानी की टंकी क्रिकेट गेंद आदि विभिन्न प्रकार की ठोस आकृतियाँ हैं। ठोस आकृतियाँ एक समतल ये आकाश (Space) में भी स्थित होती हैं अतः इसे त्रिविमीय (Three Dimensional) आकृतियों कहते हैं।

किसी ठोस आकृति के पृष्ठीय क्षेत्रफल से तात्पर्य समस्त पृष्ठों के क्षेत्रफलों के योग से है तथा किसी ठोस द्वारा आकाश (Space) में जितना स्थान घेरा जाता है वह उसका आयतन कहलाता है।

**(1) घन और घनाभ (Cube and Cuboid)** – चौक का डिब्बा, ईंट, माचिस की डिब्बी, कमरा आदि घनाभ के उदाहरण हैं। इसमें समान्तर फलकों के तीन युग्म हैं।

यदि किसी घनाभ की लम्बाई को चौड़ाई को तथा ऊँचाई को से व्यक्त किया जाये तब–

(i) घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2[\ell b + bh + \ell h] \text{ वर्ग इकाई}$$

(ii) घनाभ का आयतन = आधार का क्षेत्रफल x ऊँचाई

(लम्बाई x चौड़ाई) x ऊँचाई

$$= \ell b h \text{ घन इकाई}$$

(iii) घनाभ का विकर्ण =  $\sqrt{\ell^2 + b^2 + h^2}$  इकाई

(iv) कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल =  $4\ell h + bh + bh$

**घन :** जब घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई समान है तब, इसे घन कहा जाता है। घन के सभी 6 पृष्ठ वर्गाकार होते हैं।

(i) घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 6 वर्गाकार पृष्ठों का क्षेत्रफल

$$= 6 \text{ भुजा}^2 \text{ वर्ग इकाई}$$

(ii) घन का आयतन = भुजा x भुजा x भुजा = भुजा<sup>3</sup> घन इकाई

(iii) घन का विकर्ण  $\sqrt{\ell^2 + \ell^2 + \ell^2} = \sqrt{3\ell} = \sqrt{3}$  भुजा इकाई

**बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन (Surface Area and Volume of a Right Circular Cylinder)**

(i) प्रत्येक सिरे का क्षेत्रफल (area of each end) =  $\pi r^2$

(ii) वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल (Curved Surface Area) = Perimeter of base x height

$$= 2\pi r \times h$$

$$= 2\pi r h$$

(iii) बेलन के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल

वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल + वृत्तीय पृष्ठों का क्षेत्रफल

$$= 2\pi r h + 2\pi r^2$$

$$= 2\pi r (h + r)$$

(iv) बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल x ऊँचाई =  $\pi r^2 h$

**खोखला बेलन (Hollow Cylinder)**

(i) प्रत्येक वृत्तीय सिरे का क्षेत्रफल =  $\pi(R^2 - r^2)$

(ii) वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल

बाह्य पृष्ठीय क्षेत्रफल + आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल

= External Surface area + Internal Surface Area

$$= 2\pi R h + 2\pi r h$$

$$= 2\pi h (R + r)$$

(iii) सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2\pi R h + 2\pi r h + 2\pi(R^2 - r^2)$$

$$= 2\pi h(R + r) + 2\pi(R + r)(R - r)$$

$$= 2\pi(R + r)(R + h - r)$$

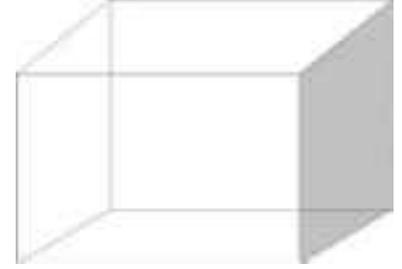
(iv) आयतन = बाहरी आयतन - आन्तरिक आयतन

$$= \pi R^2 h - \pi r^2 h$$

$$= \pi h (R^2 - r^2)$$

(बाह्य त्रिज्या R)

(अन्तः त्रिज्या r)





$$\begin{aligned}
 \Rightarrow r &= \sqrt{64} = 8 \text{ सेमी} \\
 \text{बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= 2\pi r(h+r) \\
 &= 2 \times \frac{22}{7} \times 8[7+8] \\
 &= 2 \times \frac{22}{7} \times 8 \times 15 = \frac{5280}{7} = 754.28 \text{cm}^2
 \end{aligned}$$

**उदाहरण 12:** एक अर्द्धगोलाकार कटोरा जिसकी अन्तःत्रिज्या 19 सेमी, पूरा द्रव से भरा हुआ है। इस द्रव को 3 सेमी त्रिज्या एवं 6 सेमी ऊँचाई की कितनी बोटलों में भरा जा सकता है?

**हल :** अर्द्ध गोलाकार कटोरे में भरे द्रव का आयतन

$$= \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi (19)^3 \text{ घन सेमी}$$

एक बेलनाकार बोटल का आयतन  $= \pi r^2 h = \pi (3)^2 \times 6$  घन सेमी

माना कटोरे के द्रव को खाली करने के लिए  $n$  बोटलों की आवश्यकता है।

$\therefore n$  बोटलों का आयतन = कटोरे के द्रव का आयतन

$$n(\pi(3)^2 \times 6) = \frac{2}{3} \pi (19)^3$$

$$\Rightarrow n = \frac{2\pi \times 19^3}{3\pi \times 3^2 \times 6} = \frac{2 \times 19 \times 19 \times 19}{3 \times 9 \times 6} = 72$$

अतः कटोरे के द्रव को खाली करने के लिए 72 बोटलों की आवश्यकता होगी।

**उदाहरण 13:** दो घन जिनमें प्रत्येक का आयतन 64 घन सेमी है, को एक सिरे से जोड़ दिया जाता है। इस प्रकार बने घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन ज्ञात करो।

**हल :** माना प्रत्येक घनाभ की लम्बाई  $x$  cm है तब,

$$\text{आयतन} = 64 \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow x^3 = 64 \quad \Rightarrow x^3 = 4^3$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 4} \text{cm}$$

यदि दोनों घनों की लम्बाई के अनुदिश जोड़ा जाए तो—

इस प्रकार बने घनाभ की लम्बाई  $\ell = 4 + 4 = 8 \text{cm}$

चौड़ाई  $b = 4 \text{cm}$

और ऊँचाई  $h = 4 \text{cm}$

- (i) बने घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल  $= 2(\ell b + bh + \ell h)$   
 $= 2(8 \times 4 + 4 \times 4 + 8 \times 4)$   
 $= 2[32 + 16 + 32] = 2 \times 80 = 160 \text{cm}^2$
- (ii) घनाभ का आयतन  $= \ell \cdot b \cdot h$   
 $= 8 \times 4 \times 4 = 128 \text{cm}^3$

## अध्याय – 17

## केन्द्रिय प्रवृत्ति के माप

## (Measures of Central Tendency)

इस अध्याय में से बोर्ड परीक्षा में एक मुख्य प्रश्न आता है , जिसमें माध्य , माध्यक या बहुलक ज्ञात करने से संबंधित होता है ।

माध्य / समांतर माध्य ( $\bar{x}$ )

$$\text{सूत्र } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

सूत्र से ध्यान में रखा जाता है की हमें प्रश्नों में किन - किन स्तंभों को शामिल करना है ।

जैसे - सूत्र में  $\sum f_i$  है जिसके लिए हमें बारंबारता वाले स्तंभ का योग करना है ।

सूत्र में  $\sum f_i x_i$  है जिसके लिए हमें  $f_i x_i$  का योग करना है , लेकिन प्रश्न में  $f_i x_i$  का स्तंभ नहीं है।

अतः इसे हल करते समय सारणी में एक नया स्तंभ  $f_i x_i$  बनाएंगे जो कि  $f_i$  वाले स्तंभ को  $x_i$  वाले स्तंभ से संगत गुणा करके बनाते हैं।

नोट - यदि प्रश्न में वर्ग अंतराल दिया है तो इस अंतराल से  $x_i$  वाला स्तंभ बनाए

उदाहरण 1 समांतर माध्य ज्ञात कीजिये ?

वर्ग - अंतराल	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
बारंबारता	3	2	7	3	5

हल - समांतर माध्य  $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

मान रखने पर  $\bar{x} = \frac{550}{20} = \frac{55}{2}$   $\bar{x} = 27.5$  अतः समांतर माध्य = 27.5

**Note :-** मध्यमान ज्ञात करने के लिये वर्ग अन्तराल की दोनों सीमाएँ जोड़ कर दो का

उदाहरण 2 उपरोक्त प्रश्न का कल्पित माध्य ज्ञातकर समांतर माध्य ज्ञात करना ( विचलन विधि से )

माना कि कल्पित माध्य  $A = 25$

$$\text{समांतर माध्य } \bar{x} = A + \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$\bar{x} = 25 + \frac{50}{20}$$

$$\bar{x} = 25 + 2.5 = 27.5 \quad \text{अतः समांतर माध्य} = 27.5$$

यदि प्रश्न में पद विचलन विधि से माध्य की गणना करनी है तो निम्न विधि का उपयोग करते हैं।

$$\text{कल्पित माध्य} = A = 25, \quad h = 10$$

$A = x$  में से माना जावे

$h =$  वर्ग अंतराल

$$\bar{x} = \left( \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) \times h$$

$$\bar{x} = 25 + \frac{5}{20} \times 10$$

$$\bar{x} = 25 + \frac{5}{2}$$

$$\bar{x} = 25 + 2.5$$

$$\bar{x} = 27.5$$

वर्ग अंतराल	f	माध्यमान $x_i$	$f_i x_i$
0-10	3	5	15
10-20	2	15	30
20-30	7	25	175
30-40	3	35	105
40-50	5	45	225
योग	$\sum f_i = 20$		$\sum f_i x_i = 550$

वर्ग अंतराल	f	माध्यमान $x_i$	$u_i = \frac{x_i - A}{h}$	$f u_i$
0-10	3	5	-20	-60
10-20	2	15	-10	-20
20-30	7	25	0	0
30-40	3	35	10	30
40-50	5	45	20	100
योग	$\sum f_i = 20$			$\sum f u_i = 5$

वर्ग - अंतराल	f	माध्यमान	u	f <sub>d</sub>
0-10	3	5	-2	-6
10-20	2	15	-1	-2
20-30	7	25	0	0
30-40	3	35	1	3
40-50	5	45	2	10

$$\sum f_i = 20$$

$$\sum f_i d_i = 5$$

बहुलक - वर्ग - अंतराल के प्रश्न में निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं

$$\text{बहुलक (Z)} = L + \left( \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

L = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा

$f_1$  = बहुलक वर्ग की बारंबारता

$f_0$  = बहुलक वर्ग के ठीक पूर्व वर्ग की बारंबारता

$f_2$  = बहुलक वर्ग के ठीक बाद के वर्ग की बारंबारता

h = बहुलक वर्ग का अंतराल

उदाहरण 3 निम्न बारंबारता बंटन का बहुलक ज्ञात करो ?

सर्वाधिक बारंबारता 7 है

बहुलक वर्ग = 20 - 30

$$L = 20$$

$$f_1 = 7$$

$$f_0 = 2$$

$$f_2 = 3$$

$$h = 10$$

$$\text{बहुलक (Z)} = L + \left( \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

$$\text{मान रखने पर} = 20 + \left( \frac{7 - 2}{2 \times 7 - 2 - 3} \right)$$

$$= 20 + \left( \frac{5}{14 - 5} \right) \times 10$$

$$= 20 + \frac{5}{9} \times 10$$

$$= 20 + 5.55$$

$$= 25.55$$

$$\text{अतः बहुलक (Z)} = 25.55$$

बा. बड़ी - जिस वर्ग की बारंबारता सबसे बड़ी होती है वह बहुलक वर्ग होता है।

वर्ग - अंतराल	$f_i$
0-10	3
10-20	2
20-30	7
30-40	3
40-50	5

माध्यक - जब वर्ग अंतराल दिया हो तो निम्न सूत्र से माध्यक ज्ञात करेंगे

$$\text{माध्यक (M)} = l + \left( \frac{N/2 - C}{f} \right)$$

यहाँ L = माध्यक वर्ग की निम्न सीमा

N = बारंबारताओं का योग

C = माध्यक वर्ग के ठीक पूर्व की संचयी बारंबारता

f = माध्यक वर्ग की बारंबारता

h = वर्ग अंतराल

चरण -

मा - माध्यक मा. सी. के एन का आधा

सी. - Cf

एन का आधा - N/2

(1) Cf ज्ञात करना

(2)  $N = \sum f$

(3) N/2

(4) N/2 से ठीक बड़ी Cf के सामने वाले वर्ग ही माध्यक वर्ग होगा

(5) सूत्र में मान रखकर हल करना

वर्ग - अंतराल	$f_i$	Cf
0-10	3	3
10-20	2	5
20-30	7	12
30-40	3	15
40-50	5	20

$$N = \sum f_i = 20$$

निम्न बारंबारता बंटन का माध्यक ज्ञात करना

$$\frac{N}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

10 से ठीक बड़ी Cf = 12

अतः माध्यक वर्ग = 20 - 30

$$l = 20$$

$$N = 20$$

$$C = 5$$

$$f = 7$$

$$h = 10$$

$$\begin{aligned}\text{माध्यक (m)} &= l + \left( \frac{N/2 - C}{f} \right) \\ &= 20 + \left( \frac{20/2 - 5}{7} \right) \\ &= 20 + \left( \frac{10 - 5}{7} \right) \\ &= 20 + \frac{5}{7} \times 10 \\ &= 20 + \frac{50}{7} \\ &= 20 + 7.14 \\ &= 27.14\end{aligned}$$

अतः माध्यक = 27.14

महत्वपूर्ण प्रश्न

(1) निम्न बारंबारता बंटन का समांतर माध्य ज्ञात करो ?

वर्ग - अंतराल	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
बारंबारता	9	12	15	10	14

(2) निम्न बारंबारता बंटन का पद विचलन विधि से माध्य ज्ञात करो?

वर्ग - अंतराल	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
बारंबारता	7	10	15	8	10

(3) निम्न बारंबारता बंटन से माध्यक ज्ञात किजिए?

वर्ग	0 - 8	8 - 16	16 - 24	24 - 32	32 - 40	40 - 48
f	42	30	50	22	8	5

(4) निम्न बारंबारता बंटन से बहुलक ज्ञात करो

वर्ग	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
बारंबारता	4	28	42	20	8

## प्रायिकता

## (Probability)

परिभाषा – किसी घटना के घटित होने की संभावना के आंकिक मान को, प्रायिकता कहते हैं। किसी घटना A के घटित होने की प्रायिकता को P(A) से व्यक्त करते हैं।

$$P(A) = \frac{\text{घटना A के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{घटना A के कुल परिणामों की संख्या}}$$

Note :- एक निश्चित घटना की प्रायिकता एक होती है।

- एक असंभव घटना की प्रायिकता शून्य होती है।
- किसी घटना A के लिए  $0 \leq P(A) \leq 1$
- एक घटना A के नहीं घटने की प्रायिकता को P(A') या P( $\bar{A}$ ) से व्यक्त करते हैं।
- $P(A) + P(A') = 1$
- $P(A') = 1 - P(A)$
- किसी घटना A के घटने व नहीं घटने की प्रायिकताओं का योग सदैव 1 होता है।
- एक सिक्का उछालना :-

कुल परिणामों की संख्या = 2    कुल परिणाम = {H, T}

H आने की प्रायिकता =  $\frac{1}{2}$

T आने की प्रायिकता =  $\frac{1}{2}$

दो सिक्के एक साथ उछालना या एक सिक्के को दो बार उछालना

कुल परिणाम = {HH, HT, TH, TT}    कुल परिणामों की संख्या =  $2 \times 2 = 4$

(1) दो H आने की प्रायिकता =  $\frac{1}{4}$

(2) एक H व एक T आने की प्रायिकता =  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

(3) दो T आने की प्रायिकता =  $\frac{1}{4}$

तीन सिक्के उछालना या एक सिक्के को तीन बार उछालना

कुल परिणामों की संख्या =  $2 \times 2 \times 2 = 8$

(1) तीन चित आने की प्रायिकता =  $\frac{1}{8}$

(2) दो या दो से ज्यादा चित आने की प्रायिकता =  $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

एक पासा उछालना

कुल परिणाम = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

कुल परिणामों की संख्या = 6

(1) सम अंक आना :-

अनुकूल परिणाम = {2, 4, 6}    अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

प्रायिकता =  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(2) विषम अंक आना :-

अनुकूल परिणाम = {1, 3, 5}    अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

प्रायिकता =  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

- (3) अभाज्य अंक आना :-  
 अनुकूल परिणाम = {2, 3, 5} अनुकूल परिणामों की संख्या = 3  
 प्रायिकता =  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- (4) 5 या 5 से बड़ी संख्या आना :-  
 अनुकूल परिणाम = {5, 6} अनुकूल परिणामों की संख्या = 2  
 प्रायिकता =  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- (5) पासे पर 7 से कम आने की प्रायिकता =  $\frac{6}{6} = 1$

दो पासों को एक साथ उछालना :-

$$\text{कुल परिणाम} = 6 \times 6 = 36$$

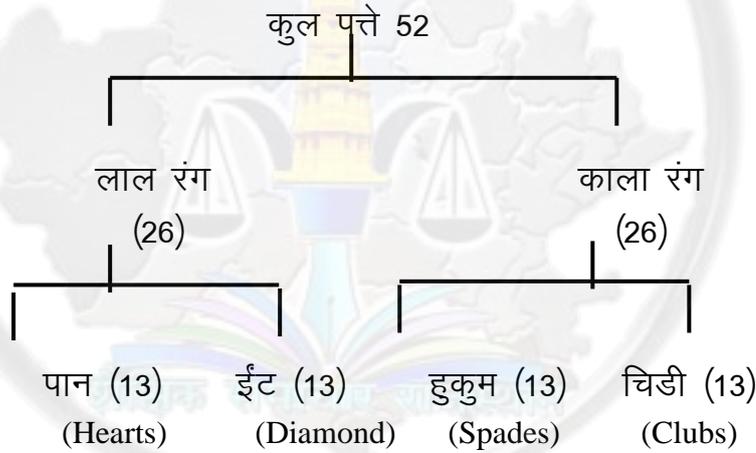
द्विक या दोनों पासों पर समान संख्या आना परिणाम  
 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}

अंकों का योग न्यूनतम = 2

अंकों का योग अधिकतम = 12

योग	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
परिणामों की संख्या	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
प्रायिकता	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

ताश



13 पत्ते - 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 गुलाम, बेगम, बादशाह, इक्का

कुल गुलाम = 4

कुल इक्के = 4

कुल बेगम = 4

कुल तस्वीर वाले पत्ते = 12

कुल बादशाह = 4

1. काला पत्ता होने की प्रायिकता =  $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$
2. लाल पत्ता होने की प्रायिकता =  $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$
3. पान का पत्ता होने की प्रायिकता =  $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
4. हुकुम का पत्ता होने की प्रायिकता =  $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
5. ईंट का पत्ता होने की प्रायिकता =  $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

$$6. \quad \text{चिडी का पत्ता होने की प्रायिकता} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$7. \quad \text{बादशाह होने की प्रायिकता} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$8. \quad \text{इक्का होने की प्रायिकता} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

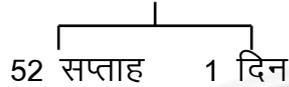
$$9. \quad \text{हुकुम का इक्का होना} = \frac{1}{52}$$

$$10. \quad \text{लाल बादशाह होना} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

$$\text{लीप वर्ष} - \quad 366 \text{ दिन} \quad 53 \text{ रविवार होने की प्रायिकता} = \frac{2}{7}$$



$$\text{अलीप वर्ष} - \quad 365 \text{ दिन} \quad 53 \text{ रविवार होने की प्रायिकता} = \frac{1}{7}$$



1 से 100 तक अभाज्य संख्याएं :-

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

1 - 25 तक - 9 अभाज्य संख्या

1 - 50 तक - 15 अभाज्य संख्या

1 - 75 तक - 21 अभाज्य संख्या

1 - 100 तक - 25 अभाज्य संख्या

भाजकता का ज्ञान करवाना :-

$$1 - 100 \text{ तक 5 से भाज्य संख्याएँ} = \frac{100}{5} = 20$$

$$1 - 100 \text{ तक 7 से भाज्य संख्याएँ} = \left[ \frac{100}{7} \right] = 14$$

$$\text{उदाहरण (1)} \quad P(A) = \frac{2}{5} \text{ हैं तो } P(A') = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

विद्यार्थियों को 1 में से घटाने का ज्ञात करवाना।

उदाहरण (2) एक बॉक्स में 25 पेन अच्छे व 5 पेन खराब है तो एक को चुने जाने पर उसके अच्छे होने की प्रायिकता ज्ञात करना।

अच्छे पेनों की संख्या = 25

खराब पेनों की संख्या = 5

कुल पेनों की संख्या = 30

$$\text{अच्छा पेन होने की प्रायिकता} = \frac{\text{अच्छे पेनों की संख्या}}{\text{कुल पेन}} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

## अध्याय – 19

### सड़क सुरक्षा शिक्षा

1. CCTV का पूरा नाम- क्लोज़्ड सर्किट टेलीविजन।
2. PUC का पूरा नाम- पोल्थूशन अन्डर कण्ट्रोल सर्टिफिकेट।
3. यातायात संकेतों में लाल बत्ती की आकृति- अष्ट भुजाकार।
4. रोक दूरी = प्रतिक्रिया दूरी + अवरोध दूरी
5. प्रतिक्रिया दूरी = रोक दूरी - अवरोध दूरी
6. अवरोध दूरी = रोक दूरी - प्रतिक्रिया दूरी
7. संख्या 19, 20, 21 को लयबद्ध बोलने में लगने वाला समय = 1 सेकण्ड।
8. प्रत्येक वाहन के लिए CPU/PUC में से कौनसा आवश्यक है- PUC।
9. दुपहिया वाहन चलाते समय सिर की सुरक्षा हेतु क्या पहनना आवश्यक है? - हेलमेट।
10. हमें सड़क के किस ओर चलना चाहिए? - बांयी ओर।
11. PUC को बढ़ावा देने के लिए सरकार ने पेट्रोल के स्थान पर कौनसी गैसों के प्रयोग करने की योजना शुरू की? - LPG और CNG।
12. सड़क सुरक्षा में CCTV कैमरा के उपयोग:- (i) इसके द्वारा चारों ओर का दृश्य दिखाई देता है जिससे कोई भी व्यक्ति यातायात नियमों का उल्लंघन करने से डरता है। (ii) इसके द्वारा किसी अपराधी का पीछा करके उसकी उस मार्ग से गुजरने की स्थिति का भी पता लगाया जा सकता है। (iii) कोई सड़क दुर्घटना होने पर CCTV द्वारा पता लग जाने से तुरन्त रोगी वाहन सेवा (Ambulance) को भेजा जा सकता है।
13. वाहनों के चालान करने के कारण:- (i) यातायात के नियम तोड़ना। (ii) हेलमेट या सीटबेल्ट का उपयोग न करना। (iii) वाहन चलाते समय मोबाइल का उपयोग करना। (iv) पुलिस व एम्बुलेंस के हॉर्न के समान हॉर्न लगवाना। (v) झाड़विंग लाइसेंस, RC, PUC तथा इंश्योरेंस में से कोई एक या सभी का न होना। (vi) वाहनों की नम्बर प्लेट पर लिखे नम्बरों का मानक आकार में नहीं होना।
14. यदि कविता अपनी कार से पहली, दूसरी, तीसरी व चौथी सिग्नल लाइट को क्रमशः 4, 9, 14, 19 सेकण्ड में पार करती है, तो 20वीं सिग्नल लाइट कितने समय में पार करेगी?  
 हल- पहली, दूसरी, तीसरी एवं चौथी सिग्नल लाइट को पार करने में लगा समय:- 4, 9, 14, 19  
 यहाँ  $9-4=5$ ,  $14-9=5$ ,  $19-14=5$ , अर्थात् अंतर समान है। अतः यह एक समान्तर श्रेणी है, जिसमें-  
 प्रथम पद  $(a) = 4$ , सार्व अन्तर  $(d) = 5$   
 अतः 20वां पद  $= a+(n-1)d$   
 $= 4+(20-1)X5$   
 $= 4+19X5$   
 $= 4+95 = 99$   
 अतः 20वीं सिग्नल लाइट पार करने में 99 सेकण्ड का समय लगेगा।
15. एक सीधे व 8 मीटर ऊँचे पोल पर यातायात नियंत्रण के लिए CCTV कैमरा लगा है जो चारों ओर घूम सकता है। यह पोल के शीर्ष से 17 मीटर दूर दृष्टि रेखा तक यातायात देख सकता है। बताइये कि यह कैमरा कितना क्षेत्रफल यातायात देख सकता है?  
 हल- पाइथगोरस प्रमेय से-  

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

$$\Rightarrow 8^2 + BC^2 = 17^2$$

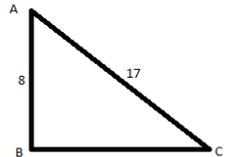
$$\Rightarrow 64 + BC^2 = 289$$

$$\Rightarrow BC^2 = 289 - 64$$

$$\Rightarrow BC^2 = 225$$

$$BC = \sqrt{225}$$

$$BC = 15 \text{ मीटर}$$
 अतः BC के अनुसार केन्द्र B के चारों ओर 15 मीटर दूरी तक क्षेत्रफल दिखाई देगा, जो कि वृत्ताकार क्षेत्र होगा।  
 अतः पोल के चारों ओर कैमरे द्वारा दिखाई देने वाला क्षेत्रफल  $= \Pi r^2$   
 $= \frac{22}{7} X 15 X 15$   
 $= 707.14 \text{ वर्ग मीटर।}$
16. किसी सड़क दुर्घटना में मरने वालों का प्रतिशत वर्षवार निम्न दण्ड आलेख के अनुसार दर्शाया गया है-
  - (i) वर्ष 2012 व 2015 में होने वाली मौतों का अनुपात बताओ।
  - (ii) वर्ष 2016 में हुई मौतों वर्ष 2015 में हुई मौतों से कितने प्रतिशत ज्यादा है?



हल- (i) 2012 की संख्या : 2015 की संख्या

$$10 : 25$$

$$2 : 5$$

(ii) 2016 में हुई मौतें = 45000

2015 में हुई मौतें = 25000

अन्तर = 45000 - 25000 = 20000

$$\text{प्रतिशत वृद्धि} = \frac{20000}{25000} \times 100$$

$$= 80\%$$

17. निम्न पाई चार्ट में विभिन्न राज्यों में दुर्घटना से हुई मौतों का आंकड़ा प्रदर्शित है। यदि इन सभी राज्यों में कुल मौतें 125000 हों तो—

(i) राजस्थान में होने वाली मौतें कितनी हैं?

(ii) म० प्रदेश व हरियाणा में हुई मौतों का योग कितना है?

हल- (i) राजस्थान में होने वाली मौतें =  $\frac{21}{100} \times 125000 =$

$$26250$$

(ii) म० प्रदेश व हरियाणा में हुई मौतों का योग =

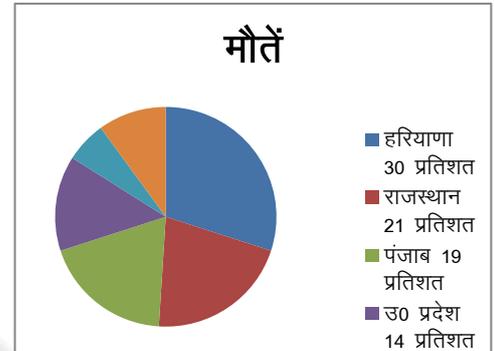
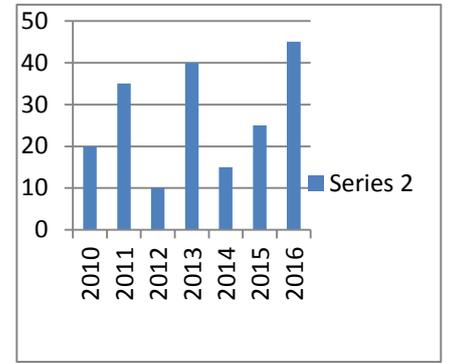
$$\frac{(10+30)}{100} \times 125000$$

=

$$\frac{40}{100} \times 125000 = 50000$$

**अभ्यास हेतु महत्वपूर्ण प्रश्न:-**

- एक सीधे व ऊर्ध्वाधर पोल पर यातायात नियंत्रण के लिए CCTV कैमरा लगा है। जो पोल के शीर्ष से 113 मीटर दृष्टि रेखा तक यातायात देख सकता है। यदि पोल के चारों ओर यह कैमरा 39424 वर्ग मीटर यातायात देख सकता है, तो पोल की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
- एक रोड स्टोन से 30वाँ सिग्नल कितनी दूर लगा है, जबकि 11वाँ सिग्नल 380 मीटर व 16वाँ सिग्नल 730 मीटर पर लगा है।
- दो कारें A व B एक हाइवे पर 200 Km. की दूरी पर हैं, यदि A व B एक ही समय पर चलना प्रारम्भ करती हैं तो समान दिशा में 5 घण्टे व विपरीत दिशा में 1 घण्टे में मिलती हैं, तो इनकी चाल ज्ञात करो



## प्रयास-2018 के तहत राज्य स्तरीय गणित कार्यशाला मे उपस्थित सम्भागी

क्र. सं.	नाम कार्मिक	पद	पदस्थापन स्थान	जिला
1	कुसुम लता पोखरना	प्राध्यापक	राउमावि चीरवा	उदयपुर
2	कुसुम बारोला	व०अ०	राउमावि डबोक	उदयपुर
3	नीता खत्री	व०अ०	राउमावि मटून	उदयपुर
4	मदन लाल आमेटा	प्राध्यापक	रा.कवरपदा उमावि उदयपुर	उदयपुर
5	गुलाम शब्बीर	व०अ०	राउमावि काछबा गोगुन्दा	उदयपुर
6	नरेन्द्र सिंह राठौड	व०अ०	राउमावि अलसीगठ	उदयपुर
7	नरेन्द्र चपलोट	व०अ०	रामावि भटेवर	उदयपुर
8	मन्जु चौधरी	प्राध्यापक	रा०कवरपदा उमावि उदयपुर	उदयपुर
9	भूपाल सिंह बाबेल	व०अ०	राउमावि बडी	उदयपुर
10	प्रवीण कुमार शाह	व०अ०	रामावि सालिया गठी	बांसवाड़ा
11	प्रभाकर शर्मा	व०अ०	राउमावि देवगढ	प्रतापगढ़
12	प्रभा शंकर आमेटा	प्र०अ०	रामावि टूस डांगियान	उदयपुर
13	संजय कुमार बोल्या	व०अ०	रामावि बोचना	उदयपुर
14	अजय कुमार	व०अ०	राउमावि कोट	उदयपुर
15	नन्द लाल गमेती	व०अ०	राउमावि लूणदा	उदयपुर
16	दिनेश कुमार दशोरा	प्रधानाध्यापक	रामावि नया	उदयपुर
17	निशा दशोरा	व.अ.	राबाउमावि, रेलमगरा	राजसमन्द
18	संदीप आमेटा	प्राध्यापक	रा.फतह उमावि, उदयपुर	उदयपुर
19	जितेन्द्र सिंह वाघेला	व.अ.	राआउमावि बाँकड़ा	डूंगरपुर
20	नीता लालवानी	व.अ.	राबाउमावि, आयड़	उदयपुर
21	अपिला भटनागर	व.अ.	राबाउमावि रेजीडेन्सी	उदयपुर
22	रामअवतार सैनी	व.अ.	राउमावि पीलीखेड़ा	प्रतापगढ़
23	सुरेश कुमार लावारा	व.अ.	राउमावि सुभाषनगर	भीलवाड़ा
24	रविकान्त	व.अ.	राउमावि रामसत्यनारायण	भीलवाड़ा
25	राकेश अग्रवाल	प्राध्यापक	राआउमावि किशनपुरा	हनुमानगढ़
26	भंवर लाल बिशनोई	व.अ.	रामावि ढण्डोरा भोपालगढ़	जोधपुर
27	मनीष दवे	व.अ.	राउमावि नारवा, मण्डोर	जोधपुर
28	अनिल कुमार तिवारी	व.अ.	राउमावि कोकुण्डा	जोधपुर
29	सुनिल कुमार जोशी	व.अ.	राउमावि घाटोदा	डूंगरपुर
30	अजय कुमार अग्रवाल	व.अ.	रामावि बीची, फणी	जयपुर
31	राजेन्द्र कुमार पंचाल	व.अ.	राउमावि आड़, धरियावद	प्रतापगढ़
32	सुरेन्द्र पाल सिंह मीणा	व.अ.	राउमावि सुहागपुरा	प्रतापगढ़
33	अमरेंग गायरी	व.अ.	राउमावि लिमयान	बांसवाड़ा
34	विजय कुमार पाठक	व.अ.	राउमावि पडौली गोर्धन	बांसवाड़ा
35	ओमप्रकाश	व.अ.	रामावि इदली रोहर	पाली
36	राजूराम	व.अ.	राउमावि बागोड़ा	जालोर
37	श्याम सुन्दर लोहार	प्राध्यापक	राउमावि सुमेरपुर	पाली
38	दिलीप सिंह परमार	व.अ.	राउमावि बागसीन	सिसोही
39	देवेन्द्र कुमार आर्य	प्राध्यापक	राउमावि पालड़ी	सिसोही

40	रमेश कुमार खत्री	प्राध्यापक	राउमावि बागसीन	सिरोही
41	छैल बिहारी शर्मा	व.अ.	रामावि रामपुरा	जयपुर
42	विजय कुमार शर्मा	व.अ.	राउमावि गोहन्दी	जयपुर
43	दीपक चन्द टेलर	व.अ.	रामावि रामपुरा	जयपुर
44	पप्पु लाल कुमावत	व.अ.	राउमावि धांधोली	जयपुर
45	संजय पण्डया	प्राध्यापक	राउमावि कनबा	डूंगरपुर
46	जुगल किशोर मीणा	व.अ.	राउमावि पिपलवास	चित्तौड़गढ़
47	राजेन्द्र यादव	व.अ.	राबाउमावि म.द.मार्ग	बीकानेर
48	राजेन्द्र स्वामी	व.अ.	राबाउमावि गुसारेसर	बीकानेर
49	प्रदीप कुमार	व.अ.	रामावि बालू	बाड़मेर
50	बबीता कुमार	व.अ.	राउमावि काररिया	बाड़मेर
51	अरुणा कुमारी लोढ़ा	व.अ.	राउमावि मंगलवाड़	चित्तौड़गढ़
52	दीपक चौधरी	प्राध्यापक	स्वामी वि.रा.मा.स्कूल बागोर	भीलवाड़ा
53	प्रसन्ना मुरला	व.अ.	महारावल राउमावि डूंगरपुर	डूंगरपुर

—: विशिष्ट योगदान :—

- 1 शरद कुमार पारीक , प्रधानाचार्य , राउमावि, तिरोल (सायरा) , उदयपुर
- 2 महेश चन्द्र शर्मा , प्राध्यापक भौतिक , राउमावि, पानेरियों की मादडी , उदयपुर
- 3 संजय बोल्या , वरिष्ठ अध्यापक , रामावि , बोयणा (मावली) , उदयपुर
- 4 प्रिया भादवीया , प्राध्यापक गणित , रागुगोसिंहउमावि , उदयपुर
- 5 मदन आमेटा , प्राध्यापक गणित , राकवरपदाउमावि , उदयपुर

