

Chapter - 3 : दो चरो वाले रैखिक समीकरण युग्म

अंक भार - 9 : प्रश्नों की संख्या - 5 (1(1) + 1(1) + 1(1) + 2(1) + 4(1) = 9(5))

- * रैखिक समीकरण - एक ऐसा समीकरण जिसमें उपस्थित चर की घात एक हो।
- * दो चरों वाला रैखिक समीकरण - जब समीकरण में उपस्थित चरों की संख्या दो एवं दोनों की घात एक-एक हो।
- * दो चरो वाले रैखिक समीकरण युग्म का व्यापक रूप

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

जहां $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ वास्तविक संख्या हैं।

तथा x, y चर हैं।

- * दो चरो वाले एक रैखिक समीकरण का आलेखन (ग्राफ) करने पर एक सरल रेखा प्राप्त होती है। अतः समीकरण युग्म में दो सरल रेखाएं एक समतल पर प्राप्त होगी। जिनकी स्थिति परस्पर निम्न प्रकार हो सकती है-
 - (1) दोनों रेखाएं एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करें।
 - (2) दोनों रेखाएं प्रतिच्छेद नहीं करें अर्थात् समान्तर हो।
 - (3) दोनों रेखाएं एक दूसरे को ढके अर्थात् सम्पाती हो।

- * उदाहरण -

$$2x + 3y = 5$$

$$2x + 3y = 9$$

$$x + 2y = 4$$

$$5x - 3y = 2$$

$$4x + 6y = 18$$

$$2x + 4y = 12$$

- * रैखिक समीकरण युग्म का हल :- ग्राफ़ीय विधि -
रैखिक समीकरण युग्म के ग्राफ़ीय आलेख से -
 - (i) रेखाएं एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करें तो अद्वितीय हल होगा।
 - (ii) रेखाएं सम्पाती हों तो - अपरिमित रूप से अनन्त हल होंगे।
 - (iii) रेखाएं समान्तर हों तो - कोई हल नहीं होगा।
- * रैखिक समीकरण युग्म के गुणांकों की तुलना :-

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

क्र.सं.	रैखिक समीकरण युग्म	$\frac{a_1}{a_2}$ $\frac{b_1}{b_2}$ $\frac{c_1}{c_2}$	अनुपातों की तुलना	ग्राफ़ीय निरूपण	बीजगणितीय निरूपण	संगत / असंगत
1.	$x - 2y = 0$ $3x + 4y - 20 = 0$	$\frac{1}{3}$ $\frac{-2}{4}$ $\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	प्रतिच्छेदी रेखाएं	केवल एक हल (अद्वितीय हल)	संगत
2.	$2x + 3y - 9 = 0$ $4x + 6y - 18 = 0$	$\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	सम्पाती रेखाएं	अनन्त हल	संगत
3.	$x + 2y - 4 = 0$ $2x + 4y - 12 = 0$		$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	समान्तर रेखाएं	कोई हल नहीं	असंगत

प्र.1 निम्न रैखिक समीकरण युग्मों के गुणांकों की तुलना करके इनके हल होंगे या नहीं

(a) $x + y = 3$ मानक रूप में लिखने पर $x + y - 3 = 0$
 $3x - 2y = 4$ $3x - 2y - 4 = 0$

यहां $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-2}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (गुणांकों के अनुपातों की तुलना)

अतः दिये गये समीकरण युग्म का केवल एक हल (अद्वितीय हल) होगा।
अर्थात् दोनों रेखाएं प्रतिच्छेद करेगी।

(b) $x + y = 5$ मानकरूप $x + y - 5 = 0$
 $2x + 2y = 10$ $2x + 2y - 10 = 0$

यहां $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}$

गुणांकों के अनुपातों की तुलना करने पर

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

अतः दिये गये रैखिक समीकरण युग्म के अपरिमित रूप से अन्त हल होंगे।
अर्थात् दोनों रेखाएं सम्पाती (ढकी हुई) होगी।

(c) $x + y = 2$ मानक रूप में - $x + y - 2 = 0$

$$2x + 2y = 3$$

$$2x + 2y - 3 = 0$$

$$\text{यहां } \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

गुणांकों के अनुपातों की तुलना करने पर

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

अतः दिये गये रैखिक समीकरण युग्म का कोई हल नहीं होगा।

अर्थात् समीकरण युग्म की रेखाएं समान्तर होंगी।

प्र.2 ग्राफ़ द्वारा निम्न समीकरण युग्म का हल ज्ञात करो।

$$x + 3y = 6$$

$$2x - 3y = 12$$

हल :- उदाहरण 4 पेज नं. 52 व 53 पर हल देखें। (पाठ्य पुस्तक से)

प्र.3 रैखिक समीकरण युग्म $3x + 2y = 12$ तथा $5x - 2y = 4$ को ग्राफ़ीय विधि द्वारा हल ज्ञात करो।

हल:- प्रत्येक समीकरण को हल करके हलों की एक सारणी बनाते हैं।

$$\text{समीकरण युग्म :-} \quad 3x + 2y = 12 \quad \dots(1)$$

$$5x - 2y = 4 \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) से

समीकरण (2) से

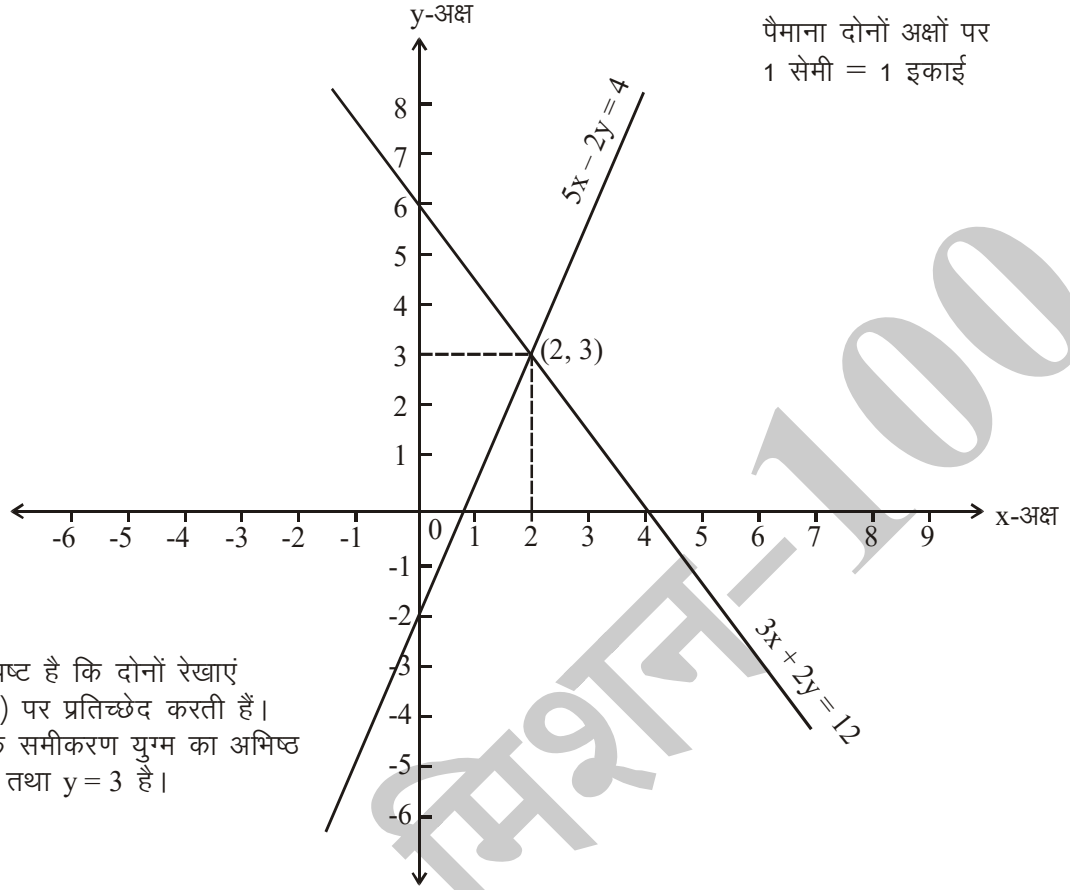
$$x = \frac{12 - 2y}{3}$$

$$x = \frac{4 + 2y}{5}$$

x	2	4	-2	0
y	3	0	9	6

x	0	2	4	-2
y	-2	3	8	-7

(ग्राफ़ पेपर पर)



ग्राफ से स्पष्ट है कि दोनों रेखाएं बिन्दु (2, 3) पर प्रतिच्छेद करती हैं।
अतः रैखिक समीकरण युग्म का अभिष्ट हल $x = 2$ तथा $y = 3$ है।

* रैखिक समीकरण युग्म को हल करने की बीजगणितीय विधियां –

- (1) प्रतिस्थान विधि
- (2) विलोपन विधि
- (3) वज्र गुणा विधि

(1) प्रतिस्थापन विधि— (उदाहरण से)

Ex.- रैखिक समीकरण युग्म $7x - 15y = 2 \dots(1)$ को प्रतिस्थापन विधि से हल करो –
 $x + 2y = 3 \dots(2)$

हल:- चरण -1 किसी एक समीकरण को लेते हैं तथा किसी एक चर का मान दूसरे चर के पदों में लिखते हैं –

अतः समीकरण (2) से

चरण -II $x = 3 - 2y \dots(3)$

x का मान समीकरण (3) से समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$$7(3 - 2y) - 15y = 2$$

$$21 - 14y - 15y = 2$$

$$-29y = 2 - 21$$

$$-29y = -19$$

$$y = \frac{-19}{29}$$

चरण -III y का यह मान समीकरण (3) में रखने पर

$$x = 3 - 2 \times \frac{19}{29} = 3 - \frac{38}{29}$$

$$= \frac{87 - 38}{29} = \frac{49}{29}$$

अतः समीकरण युग्म का हल $x = \frac{49}{29}$ तथा $y = \frac{19}{29}$

प्र.1. निम्न रैखिक समीकरण युग्मों को प्रतिस्थापन विधि से हल करो।

(a) $x + y = 14$

(b) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$

$x - y = 4$

$\sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0$

प्र.2. यदि किसी भिन्न संख्या के अंश तथा हर में 2 जोड़ दिया जाए, तो वह $\frac{9}{11}$ हो जाती है। यदि अंश व हर में 3 जोड़ दिया जाए, तो

वह $\frac{5}{6}$ हो जाती है। वह भिन्न संख्या ज्ञात करो।

(2) विलोपन विधि – (उदाहरण से)

Ex.- दो व्यक्तियों की आय का अनुपात 9 : 7 है और उनके खर्चों का अनुपात 4 : 3 है। यदि प्रत्येक व्यक्ति प्रति महीने में 2000 रु. बचना लेता है, तो उनकी मासिक आय ज्ञात करो। (समीकरण युग्म बनाकर विलोपन विधि से हल करो।)

हल:- मासिक आय 9x, 7x तथा खर्च 4y, 3y

तब $9x - 4y = 2000 \dots(1)$

$7x - 3y = 2000 \dots(2)$

चरण-I समीकरणों में किसी एक चर का गुणांक समान करते हैं।

यहां हम दोनों समीकरणों में चर y का गुणांक समान करेंगे। जिसके लिए समीकरण (1) को 3 तथा समीकरण (2) को 4 से गुणा करने पर –

$$27x - 12y = 6000 \quad \dots(3)$$

$$28x - 12y = 8000 \quad \dots(4)$$

चरण-II y को विलुप्त करने के लिए समीकरण (3) में से समीकरण (4) को घटाने पर

$$\begin{aligned} 27x - 28x - 12y - (-12y) &= 6000 - 8000 \\ -x &= -2000 \end{aligned}$$

चरण-III x का मान समीकरण (2) में रखने पर

$$\begin{aligned} 7 \times 2000 - 3y &= 2000 \\ -3y &= 2000 - 14000 \\ -3y &= -12000 \end{aligned}$$

अतः समीकरण युग्म का हल $x = 2000, y = 4000$

मासिक आय $= 9x = 9 \times 2000 = 18000$ रु.

प्र.1 विलोपन विधि द्वारा समीकरण युग्म $3x - 5y = 4$ और $9x = 2y + 7$ का हल ज्ञात करो।

प्र.2 पांच वर्ष पूर्व नूरी की आयु सोनू की आयु की तीन गुनी थी। दस वर्ष पश्चात नूरी की आयु सोनू की आयु की दोगुनी हो जायेगी। नूरी एवं सोनू की आयु कितनी है। विलोपन विधि द्वारा ज्ञात करो।

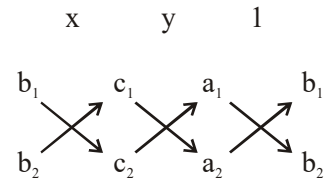
(3) व्रज गुणा विधि -

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$\frac{x}{b_1c_2 - c_1b_2} = \frac{y}{c_1a_2 - a_1c_2} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

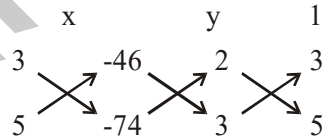
$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$



प्र.1 रैखिक समीकरण युग्म $2x + 3y - 46 = 0$ को व्रज गुणा विधि से हल करो।

$$3x + 5y - 74 = 0$$

हल:- गुणाकों को निम्न प्रकार लिखते हैं -



$$\frac{x}{3(-74) - 5(-46)} = \frac{y}{(-46)3 - (-74)(2)} = \frac{1}{2 \times 5 - 3 \times 3}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-222+230} = \frac{y}{-138+148} = \frac{1}{10-9}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{10} = \frac{1}{1}$$

$$\text{अर्थात् } \frac{x}{8} = \frac{1}{1} \quad \text{or} \quad \frac{y}{10} = \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow x = 8 \quad \text{or} \quad y = 10$$

$$\text{अतः हल } x = 8 \quad \text{व} \quad y = 10$$

प्र.2 रैखिक समीकरण युग्म $2x + 3y = 11$ को वज्र गुणा विधि से हल ज्ञात करो।

$$2x - 4y = 24$$

प्र.3 दो संख्याओं का अन्तर 26 है और एक संख्या दूसरी संख्या की तीन गुनी है। बीजगणितीय रूप में व्यक्त कर हल ज्ञात करो।

प्र.4 दो संपूरक कोणों में बड़ा कोण छोटे कोण से 18° अधिक है। दोनों कोण ज्ञात करो।

विविध प्रश्न

1. k के किस मान के लिए समीकरण युग्म $x + y - 4 = 0$; $2x + ky - 3 = 0$ का कोई हल नहीं होगा -

(a) 0

(b) 2

(c) 6

(d) 8

Ans (c)

2. k के किस मान के लिए समीकरण युग्म $3x - 2y = 0$; $kx + 5y = 0$ के अनन्त हल होंगे -

(a) $\frac{1}{2}$

(b) 3

(c) $-\frac{5}{3}$

(d) $-\frac{15}{2}$

Ans (d)

3. रैखिक समीकरण युग्म $kx - y = 2$; $6x - 2y = 3$ का हल अद्वितीय होगा यदि -

(a) $k = 2$

(b) $k = 3$

(c) $k \neq 3$

(d) $k \neq 0$

Ans (c)

4. रैखिक समीकरण $y - 3 = 0$; $x - 3 = 0$ एवं अक्षों से निर्मित आकृति होगी -

(a) त्रिभुज

(b) वर्ग

(c) आयत

(d) समचतुर्भुज

Ans (b)

5. k का वह मान ज्ञात करो जिसके लिए रैखिक समीकरण युग्म $kx - 5y = 2$; $6x + 2y = 7$ का कोई हल नहीं होगा।

6. रोमिला ने एक स्टेशनरी की दुकान से 9रु. में 2 पेन्सिल तथा 3 रबर खरीदी। उसकी सहेली सोनाली ने भी उसी तरह के 18रु. में 4 पेन्सिल तथा 6 रबर खरीदे। इसे बीजगणितीय रूप में व्यक्त करो।

7. कक्षा X के 10 विद्यार्थियों ने एक गणित की पहेली प्रतियोगिता में भाग लिया। यदि लड़कियों की संख्या लड़कों की संख्या से 4 अधिक हो, तो प्रतियोगिता में भाग लेने वाले लड़कों एवं लड़कियों की संख्या ज्ञात करो।

8. एक आयताकार बाग, जिसकी लम्बाई, चौड़ाई से 4 m अधिक है, का अर्द्धपरिमाप 36 m है। बाग की लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात करो।

9. रैखिक समीकरण युग्म $2x + y - 6 = 0$; $4x - 2y - 4 = 0$ के संगत/असंगत की पहचान कीजिए। यदि संगत है तो हल भी ज्ञात करो।

10. $2x + 3y = 11$ और $2x - 4y + 24 = 0$ को हल कीजिए और इससे m का वह मान ज्ञात करो जिसके लिए $y = mx + 3$ हो।

11. P के किन मानों के लिए निम्न समीकरण युग्म का एक अद्वितीय हल है ?

$$4x + Py = -8; 2x + 2y + 2 = 0$$

12. k के किन मानों के लिए रैखिक समीकरण $3x + y = 1$ के कोई हल नहीं होगा।

$$(2k - 1)x + (k - 1)y = 2k + 1$$

* दो चरों वाले रैखिक समीकरणों के युग्मों में बदले जा सकने वाले समीकरण

Ex.1 $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13; \frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2$ को हल करो।

हल:- समीकरणों के युग्म को

$$2\left(\frac{1}{x}\right) + 3\left(\frac{1}{y}\right) = 13 \quad \dots(1)$$

$$5\left(\frac{1}{x}\right) - 4\left(\frac{1}{y}\right) = -2 \quad \dots(2)$$

अब $\frac{1}{x} = u, \frac{1}{y} = v$ समीकरण (1) तथा (2) में रखने पर

$$2u + 3v = 13 \quad \dots(1)$$

$$5u - 4v = -2 \quad \dots(2)$$

समीकरण (3) व (4) रैखिक समीकरण युग्म बनाते हैं जिनसे u व v का मान ज्ञात कर $\frac{1}{x} = u$ तथा $\frac{1}{y} = v$ में रखकर x तथा y के मान ज्ञात कर सकते हैं।

Ex.2 रैखिक समीकरण युग्म में बदल कर हल ज्ञात करो -

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y+2} = 2; \frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

हल:- दिये गये समीकरणों में $\frac{1}{x-1} = p$ तथा $\frac{1}{y-2} = q$ प्रतिस्थापित करने पर

$$5p + q = 2 \quad \dots(1)$$

$$6p - 3q = 1 \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) रैखिक समीकरण युग्म के रूप में हैं।

अतः वज्र गुणा विधि से हल -

$$\begin{array}{ccc} p & = & q & = & 1 \\ \begin{array}{c} 1 \quad -2 \\ -3 \quad -1 \end{array} & & \begin{array}{c} -2 \quad 5 \\ -1 \quad 6 \end{array} & & \begin{array}{c} 5 \quad 1 \\ 6 \quad -3 \end{array} \end{array}$$

$$\frac{p}{-1-6} = \frac{q}{-12+5} = \frac{1}{-15-6}$$

अतः $p = \frac{1}{3}; q = \frac{1}{3}$

p व q के मान रखने पर $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{3}, \frac{1}{y-2} = \frac{1}{3}$

$x-1=3 \quad y-2=3$

$x=4 \quad y=5$

अतः $x=4$ तथा $y=5$ दिये गये समीकरणों का अभिष्ट हल है।

प्र.1 निम्न समीकरण युग्मों को रैखिक समीकरणों में बदल कर हल ज्ञात करो।

(a) $\frac{7x-2y}{xy} = 5; \frac{8x+7y}{xy} = 15$

(b) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4}; \frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = \frac{-1}{8}$

Chapter - 1 : वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers)

अंक भार— 4 : प्रश्नों की संख्या – 3 (1(1) + 2(1) + 1(1) = 4(3))

यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका (Euclid's Division Lemma) -

दो धनात्मक पूर्णांक a और b दिए रहने पर, ऐसी अद्वितीय पूर्ण संख्याएँ q और r विद्यमान हैं कि $a = bq + r$, $0 \leq r < b$ हैं। यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म इसी प्रमेयिका पर आधारित है। यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म दो धनात्मक पूर्णांकों का HCF ज्ञात करने की एक विधि है।

उदा. 867 और 255 का HCF यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करके ज्ञात कीजिए।

हल:— यहाँ $867 > 255$

867 और 255 पर यूक्लिड प्रमेयिका के प्रयोग से —

$$867 = 255 \times 3 + 102$$

$$255 = 102 \times 2 + 51$$

$$102 = 51 \times 2 + 0$$

यहाँ शेषफल 0 प्राप्त हो गया है। इस स्थिति में अन्तिम भाजक 51 है।

$$\therefore \text{HCF}(867, 255) = 51$$

अंकगणित की आधारभूत प्रमेय (The fundamental theorem of arithmetic) -

प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है तथा यह गुणनखण्ड अभाज्य गुणनखण्डों के आने वाले क्रम के बिना अद्वितीय होते हैं।

- * दो धनात्मक पूर्णांकों के HCF और LCM अंकगणित की आधारभूत प्रमेय (अभाज्य गुणनखंड विधि) द्वारा ज्ञात कर सकते हैं।
- * किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांकों a और b के लिए

$$\text{HCF}(a, b) \times \text{LCM}(a, b) = a \times b$$

अर्थात् दो संख्याओं का गुणनफल उनके LCM एवं HCF के गुणनफल के बराबर होता है।

उदा. अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा 510 और 92 का HCF और LCM ज्ञात करो।

हल:— $510 = 2 \times 3 \times 5 \times 17$

$$92 = 2^2 \times 23$$

$$\text{HCF}(510, 92) = 2$$

$$\text{LCM}(510, 92) = 2^2 \times 3 \times 5 \times 17 \times 23 = 23460$$

उदा. $\text{HCF}(96, 404) = 4$ है तो $\text{LCM}(96, 404)$ ज्ञात करें।

हल:— $\text{HCF} \times \text{LCM} =$ दो संख्याओं का गुणनफल

$$4 \times \text{LCM} = 96 \times 404$$

$$\text{LCM} = \frac{96 \times 404}{4} = 9696$$

परिमेय संख्याओं और उनके दशमलव प्रसार –

एक परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार या तो सांत दशमलव प्रसार (terminating decimal expansions) होता है या असांत आवर्ति (non-terminating repeating) होता है।

प्रमेय मान लीजिए $x = \frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या ऐसी है कि q , $2^n 5^m$ के रूप का है, जहां n और m ऋणेतर पूर्णांक हैं। तब x का दशमलव प्रसार सांत होता है।

उदा. $\frac{13}{125} = \frac{13}{5^3} = \frac{13 \times 2^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{104}{10^3} = 0.104$

अतः $\frac{13}{125}$ का दशमलव प्रसार सांत है।

प्रमेय मान लीजिए $x = \frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या इस प्रकार की है कि q का अभाज्य गुणनखण्ड $2^n 5^m$ के रूप का नहीं है जहां n, m ऋणेतर पूर्णांक हैं। तब x का दशमलव प्रसार असांत आवर्ति होता है।

उदा. $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ का दशमलव प्रसार असांत आवर्ति है क्योंकि इसका हर $2^n 5^m$ के रूप का नहीं है।

प्र.1 दो पूर्णाकों के गुणनफल के बराबर होता है –

(a) HCF

(b) LCM

(c) $\frac{HCF}{LCM}$

(d) HCF \times LCM

Ans ()

प्र.2 $\frac{7}{2^4 \times 5}$ का दशमलव प्रसार है –

(a) सांत

(b) असांत आवर्ति

(c) असांत अनावर्ति

(d) असांत आवर्ति

Ans ()

प्र.3 एक परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का योग या अंतर होती है –

(a) परिमेय संख्या

(b) अपरिमेय संख्या

(c) पूर्णांक संख्या

(d) प्राकृत संख्या

Ans ()

प्र.4 निम्न में से अपरिमेय संख्या है –

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(b) $7\sqrt{5}$

(c) $6 + \sqrt{2}$

(d) उपरोक्त सभी

Ans ()

प्र.5 HCF (6, 12, 120) है –

(a) 2

(b) 3

(c) 6

(d) 1

Ans ()

महत्वपूर्ण प्रश्न

- प्र.1 4052 और 12575 का HCF यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करके ज्ञात कीजिए।
- प्र.2 455 और 42 का HCF यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से ज्ञात कीजिए।
- प्र.3 32760 को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।
- प्र.4 $HCF(306, 657) = 9$ दिया है। $LCM(306, 657)$ ज्ञात कीजिए।
- प्र.5 सिद्ध करो $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।
- प्र.6 दर्शाइए कि एक धनात्मक विषम पूर्णांक $4q + 1$ या $4q + 3$ के रूप का होता है।
- प्र.7 $\frac{13}{125}$ का दशमलव प्रसार लिखिए और बताइए कि इसका दशमलव प्रसार सांत या असांत आवर्ती है।
- प्र.8 $\frac{14588}{625}$ का दशमलव प्रसार लिखिए।

Chapter - 5

अंक भार- 9 : प्रश्नों की संख्या - 5 (1(1) + 1(1) + 2(1) + 2(1) + 3(1))

- * एक समान्तर श्रेणी संख्याओं की ऐसी सूची होती है, जिसमें प्रत्येक पद अपने से ठीक पहले पद में एक निश्चित संख्या जोड़कर प्राप्त होता है।
- * यह निश्चित संख्या समान्तर श्रेणी का सार्व अन्तर (d) कहलाती है।
- * एक समान्तर श्रेणी का व्यापक रूप $a, a + d, a + 2d, a + 3d \dots$ है।
- * प्रथम पद a और सार्वअन्तर d वाली AP का n वां पद निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त होता है।

$$a_n = a + (n - 1)d$$

- * किसी AP के प्रथम n पदों का योग

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

- * यदि एक परिमित AP का अंतिम पद l है, तो इस AP के सभी पदों का योग

$$S = \frac{n}{2}(a + l)$$

- * प्रथम n घन पूर्णांकों का योग

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- * किसी AP का n वां पद उसके प्रथम n पदों के योग और प्रथम $(n - 1)$ पदों के अंतर के बराबर है

अर्थात् $a_n = S_n - S_{n-1}$

उदाहरणार्थ $a_2 = S_2 - S_1$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

- निम्नलिखित में कौनसी AP है -
(a) 2, 4, 8, 16, ... (b) 3, 5, 8, 12, ...
(c) 1, 3, 9, 27, ... (d) $a, 2a, 3a, 4a, \dots$ Ans (d)
- AP 5, 11, 17, 23, ... का प्रथम पद और सार्वअन्तर क्या है ?
(a) (6, 5) (b) (5, 11)
(c) (5, 6) (d) (11, 6) Ans (c)
- AP 72, 70, 68, 66 का कौनसा पद 40 होगा -
(a) 16वां (b) 15वां
(c) 20वां (d) 17वां Ans (d)
- यदि किसी AP में $a_n = 9 - 5_n$ है तो AP का प्रथम पद होगा -
(a) 9 (b) 4
(c) 5 (d) 14 Ans (b)

5. प्रथम 50 घन पूर्णांको का योग होगा –
 (a) 1250 (b) 1225
 (c) 1275 (d) 1235 Ans (c)
6. निम्नलिखित प्रश्नों में रिक्त स्थानों की पूर्ति करते हुए उत्तर पुस्तिक में लिखिए–
 (i) AP 2,, 26 में रिक्त स्थान ज्ञात कीजिए। Ans (14)
 (ii) यदि $a = 7, d = 3, n = 8$ है $a_n = \dots\dots\dots$ होगा। Ans (28)
 (iii) यदि $a = 4, l = 28, n = 9$ है तो $S = \dots$ होगा। Ans (144)
 (iv) यदि $S_2 = 45$ व $S_3 = 63$ है तो $a_3 = \dots$ होगा। Ans (18)
 (v) किसी AP में $a_n = 3 + 4n$ है तो $a_5 = \dots$ होगा। Ans (23)

लघुतरात्मक प्रश्न

1. AP 3, 8, 13, 18, ... का कौनसा पद 78 है।

हल $a = 3, d = 8 - 3 = 5, a_n = 78$

$$a_n = a + (n - 1) d \Rightarrow \frac{75}{5} = n - 1$$

$$78 = 3 + (n - 1) \times 5 \Rightarrow 15 = n - 1$$

$$\Rightarrow 78 - 3 = (n - 1) \times 5 \Rightarrow 15 + 1 = n$$

$$\Rightarrow 75 = (n - 1) \times 5 \Rightarrow 16 = n$$

2. AP 3, 8, 13, ... 253 में अंतिम पद से 20वां पद ज्ञात कीजिए।

हल $a = 253, s = 3 - 8 = -5, n = 20$

$$a_n = a + (n - 1) d$$

$$a_{20} = 253 + (20 - 1) \times (-5)$$

$$\Rightarrow a_{20} = 253 + 19 \times (-5)$$

$$\Rightarrow a_{20} = 253 - 95$$

$$\Rightarrow a_{20} = 258$$

3. तीन अंकों वाली कितनी संख्याएँ 7 से विभाज्य है?

हल 102, 105,, 999

$$a = 102, d = 3, a_n = 999$$

$$a_n = a + (n - 1) d$$

$$999 - 102 + (n - 1) \times 3$$

$$\Rightarrow 999 - 102 = (n - 1) \times 3$$

$$\Rightarrow \frac{897}{3} = n - 1$$

$$\Rightarrow 299 = n - 1$$

$$\Rightarrow 299 + 1 = n$$

$$\Rightarrow \boxed{300 = n}$$

4. उस AP का 31वां पद ज्ञात कीजिए, जिसका 11वां पद 38 और 16वां पद 73 है।

हल $a_{11} = 38$ $a_{16} = 73$
 $a + 10d = 38 \dots(1)$ $a + 15d = 73 \dots(2)$
समीकरण (2) – समीकरण (1)
 $a + 15d - a - 10d = 73 - 38$ d का मान समीकरण (1) में रखने पर,
 $\Rightarrow 5d = 35$ $a + 10 \times 7 = 38$
 $\Rightarrow d = \frac{35}{5} = 7$ $a + 70 = 38$
 $a = 38 - 70 = -32$

31वां पद

$$\begin{aligned} a_{31} &= a + 30d \\ &= (-32) + 30 \times 7 \\ &= -32 + 210 = 178 \end{aligned}$$

5. $34 + 32 + 30 + \dots + 10$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल $a = 34, d = -2, a_n = 10, n = ?$

$$\begin{aligned} n &= \frac{a_n - a}{d} + 1 & S &= \frac{33}{2}(a + l) \\ n &= \frac{10 - 34}{-2} + 1 & S &= \frac{13}{2}(34 + 10) \\ n &= \frac{-24}{-2} + 1 & S &= \frac{13}{2} \times 44 \\ n &= 12 + 1 = 13 & S &= 286 \end{aligned}$$

6. 0 और 50 के बीच की विषम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

हल AP 1, 3, 5, 7,, 49

$a = 1, d = 2, a_n = 49, n = ?$

$$\begin{aligned} n &= \frac{a_n - a}{d} + 1 & S &= \frac{n}{2}(a + l) \\ n &= \frac{49 - 1}{2} + 1 & S &= \frac{25}{2}(1 + 49) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow n = \frac{48}{2} + 1 \quad S = \frac{25}{2} \times 50$$

$$\Rightarrow n = 25 \quad S = 625$$

7. किसी AP का प्रथम पद 5, अंतिम पद 45 और योग 400 है। पदों की संख्या और सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए।

हल $a = 5, l = 45, S = 400, n = ?$

$$S = \frac{n}{2}(a+l) \quad l = a + (n-1)d$$

$$400 = \frac{n}{2}(5+45) \quad \Rightarrow \quad 45 = 5 + (n-1)d$$

$$\Rightarrow \frac{400 \times 2}{50} = n \quad \Rightarrow \quad \frac{40}{15} = \frac{8}{3} = d$$

$$\Rightarrow 16 = n \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{3} = d$$

8. किसी स्कूल के विद्यार्थियों को उनके समग्र शैक्षिक प्रदर्शन के लिये 7 नकद पुरस्कार देने के लिये 700 रु. की राशि रखी गई है। यदि प्रत्येक पुरस्कार अपने से ठीक पहले पुरस्कार से 20 रु. कम है तो प्रत्येक पुरस्कार का मान ज्ञात कीजिए।

हल माना प्रथम पुरस्कार a है। तो

$$a, a - 20, a - 40, a - 60, a - 80, a - 100, a - 120$$

$$a + a - 20 + a - 40 + a - 60 + a - 80 + a - 100 + a - 120 = 700$$

$$\Rightarrow 7a - 420 = 700$$

$$\Rightarrow 7a = 700 + 420$$

$$\Rightarrow a = \frac{1120}{7} = 160$$

अतः प्रथम पुरस्कार 160, द्वितीय 140, तृतीय 120, चतुर्थ 100, पंचम 80, षष्ठ 60

दीर्घलघुतरात्मक प्रश्न

प्र.1 इस AP के प्रथम 51 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए, जिसके दूसरे और तीसरे पद क्रमशः 14 और 18 पद है।

प्र.2 8 के प्रथम 15 गुणनों का योग ज्ञात कीजिए।

प्र.3 संख्याओं की उस सूची के प्रथम 24 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसका n वां पद $a = 3 + 2n$ है।

प्र.4 n के किस मान के लिए दोनों समांतर श्रेणियों 63, 65, 67, और 3, 10, 7, के n वें पद बराबर होंगे।

प्र.5 किसी AP के चौथे और 8वें पदों का योग 24 तथा छठे और 10वें पदों का योग 44 है। इस AP के प्रथम तीन पद ज्ञात कीजिए।

प्र.6 फूलों की एक क्यारी की पहली पंक्ति में 23 गुलाब के पौधे हैं। दूसरी पंक्ति में 21 गुलाब के पौधे हैं, तीसरी पंक्ति में 19 गुलाब के पौधे हैं, इत्यादि। उसकी अंतिम पंक्ति में 5 गुलाब के पौधे हैं इस क्यारी में कुल कितनी पंक्तियां हैं?

Chapter - प्रायिकता

अंक भार- 4 : प्रश्नों की संख्या - 3 (1(1) + 1(1) + 2(1))

* किसी घटना को घटित होने पर संभावना का संख्यात्मक रूप ही प्रायिकता है।

$$\text{प्रायिकता} = \frac{\text{घटना के अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल संभावित परिणाम}}$$

* $P(A)$ - घटना A के घटित होने की प्रायिकता

* $P(\bar{A})$ - घटना A के घटित नहीं होने की प्रायिकता

* $P(A) = 1 - P(\text{not } A)$ या $1 - P(\bar{A})$

निम्न प्रश्नों के उत्तर सही विकल्प चयन कर उत्तर दीजिए -

- यदि कोई घटना E है, तब $P(E) + P(\bar{E})$ का मान होगा -
(a) 1 (b) 2
(c) -1 (d) 0 Ans ()
- किसी घटना की प्रायिकता होती है -
(a) 1 (b) 0.1
(c) -3 (d) 15% Ans ()
- एक असंभव घटना की प्रायिकता नहीं होती है -
(a) 0 (b) 0 व 1 के मध्य
(c) 1 (d) कोई नहीं Ans ()
- एक निश्चित घटना की प्रायिकता होती है -
(a) 1 (b) 0
(c) 0 से 1 के मध्य (d) 1 से बड़ी Ans ()
- एक ताश की गड्डी में तस्वीर वाले पत्तों की कुल संख्या होती है -
(a) 10 (b) 13
(c) 12 (d) 11 Ans ()
- एक सिक्के को उछालने पर चित आने की प्रायिकता होती है -
(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$
(c) 1 (d) 2 Ans ()
- एक पासे को फेंकने पर आने वाले कुल संभावित परिणाम होंगे -
(a) 5 (b) 6
(c) 8 (d) 7 Ans ()
- एक पासे को फेंकने पर अभाज्य संख्या आने की प्रायिकता होगी -
(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{4}$

(c) $\frac{1}{2}$

(d) $\frac{3}{4}$

Ans ()

9. यदि $P(A)$, घटना A के होने की प्रायिकता को दर्शाता हो, तो –

(a) $P(A) > 1$

(b) $P(A) < 0$

(c) $0 \leq P(A) \leq 1$

(d) $-1 \leq P(A) \leq 1$

Ans ()

10. 52 पत्तों की अच्छी तरह फेंटी गई गड्डी से एक पत्ता निकाला जाता है, तो एक इक्का प्राप्त होने की क्या प्रायिकता है –

(a) $\frac{1}{4}$

(b) $\frac{1}{13}$

(c) $\frac{1}{26}$

(d) $\frac{2}{13}$

Ans ()

पासे से संबंधित प्रश्न –

* एक पासे को n बार/ n पासों को एक बार फेंकने पर कुल संभव परिणाम = 6^n

* एक पासे को एक बार उछालने पर कुल संभव परिणाम = 1, 2, 3, 4, 5, 6

कुल परिणाम = 06

सम संख्या = 2, 4, 6

विषम संख्या = 1, 3, 5

अभाज्य संख्या = 2, 3, 5

1. एक पासे को एक बार उछालने पर सम संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल कुल परिणाम = 06

सम संख्या = 2, 4, 6

सम संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

2. एक पासे को दो बार उछालने पर संभावित कुल परिणाम कितने होंगे?

हल $6^2 = 36$

3. एक पासे को दो बार उछालने पर इसकी क्या प्रायिकता होगी कि प्राप्त संख्याएं युग्मक (द्विक) संख्याएं हो –

हल युग्मक संख्याएं (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)

कुल = 06

युग्मक संख्याएं प्राप्त होने की प्रायिकता = $\frac{06}{36} = \frac{1}{6}$

सिक्के से संबंधित प्रश्न –

* एक सिक्के को n बार/ n सिक्को को एक बार उछालने पर कुल परिणाम = 2^n

4. एक सिक्के को दो बार उछालने पर कुल परिणाम लिखो–

हल $2^2 = 4$ (HH, HT, TH, T²T)

5. एक सिक्के को दो बार उछालने पर दोनों बार पर (T) आने की प्रायिकता करे।

हल कुल परिणाम = 04

दोनों बार पर (T) आने की अनुकूल परिणाम = TT

$$\text{प्रायिकता} = \frac{1}{4}$$

6. एक सिक्के को तीन बार उछालने पर संभावित कुल परिणाम कितने होंगे?

हल $2^3 = 8$

ताश के पत्तों (कार्ड) से संबंधित प्रश्न –

* ताश की गड्डी में कुल पत्ते (कार्ड) = 52

* लाल रंग के पत्ते = 26

* काले रंग के पत्ते = 26

* मुख (फेस)/तस्वीर कार्ड = 12 (4+4+4)

* बादशाह = 04 बेगम = 04 गुलाम = 04

* हुकुम के पत्ते = 13 (काले), ईट के पत्ते = 13 (लाल)

पान के पत्ते = 13 (लाल), चीड़ी के पत्ते = 13 (काले)

7. ताश की गड्डी में से एक पत्ता निकालने पर काले रंग का पत्ता प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल कुल परिणाम = 52

काले रंग का पत्ता आने के अनुकूल परिणाम = 26

$$\text{काले रंग का पत्ता आने की प्रायिकता} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

8. ताश के 52 पत्तों की एक भली भांति गड्डी में से एक पत्ता निकाला गया है। निकले गए पत्ते की प्रायिकता ज्ञात करो यदि—

(a) पत्ता फेस वाला हो (b) पत्ता ईट का हो

(c) पत्ता लाल रंग का बादशाह हो (d) इक्का न हो

(e) काले रंग की तस्वीर वाला पत्ता हो

हल (a) कुल परिणाम = 52

पत्ता फेस वाले के परिणाम = 12

$$\therefore \text{प्रायिकता} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

(b) पत्ता ईट के परिणाम = 13

$$\therefore \text{ईट के पत्ते होने की प्रायिकता} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

(c) पत्ते लाल रंग का बादशाह होने के अनुकूल परिणाम = 02

$$\text{निकाला गया पत्ता लाल रंग के बादशाह होने की प्रायिकता} = \frac{02}{52} = \frac{1}{26}$$

(d) इक्का न होने के अनुकूल परिणाम = $52 - 2 = 48$

निकाला गया पत्ता इक्का न होने की प्रायिकता = $\frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

(e) काले रंग के तस्वीर वाला पत्ता होने के अनुकूल परिणाम = 06

निकाला गया पत्ता काले रंग का तस्वीर वाले होने की प्रायिकता = $\frac{6}{52} = \frac{3}{26}$

9. एक लीप वर्ष में 53 रविवार होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल लीप वर्ष में कुल दिन = 366

52 पूर्ण सप्ताह अर्थात् $52 \times 7 = 364$ दिन

शेष दिन = 02 [(रवि, सोम), (सोम, मंगल), (मंगल, बुध), (बुध, गुरु), (गुरु, शुक्र), (शुक्र, शनि), (शनि, रवि)]

अतः कुल परिणाम = 07

इन 7 स्थितियों में रविवार आने के अनुकूल परिणाम = 02

अतः 53 रविवार आने की प्रायिकता = $\frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{2}{7}$

10. एक डिब्बे में 20 खराब पेन व 130 अच्छे पेन हैं, यदि एक पेन यादृच्छया निकाला गया है तो पेन के खराब होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल डिब्बे में कुल पेन (कुल परिणाम) = $20 + 130$
= 150 (पेन)

∴ खराब पेन होने की प्रायिकता = $\frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{20}{150} = \frac{2}{15}$

11. एक डिब्बे में 5 लाल कंचे, 8 हरे कंचे और 3 सफेद कंचे हैं। इस डिब्बे में से एक कच्चा निकालने की प्रायिकता होगी यदि वह कच्चा –

(i) लाल है?

(ii) हरा नहीं है?

(iii) सफेद है ?

उत्तर (i) डिब्बे में कुल कंचों की संख्या (कुल परिणाम) = $5 + 8 + 3 = 16$

लाल कंचों की संख्या = 5

लाल कंचे नहीं आने की प्रायिकता = $\frac{\text{अनुकूल परिणाम}}{\text{कुल परिणाम}} = \frac{5}{16}$

(ii) हरा कंचे नहीं होने के परिणाम = $16 - 8 = 08$

∴ हरा कंचे नहीं होने की प्रायिकता = $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

(iii) सफेद कंचों की संख्या = 3

∴ सफेद कंचे आने की प्रायिकता = $\frac{3}{16}$

अभ्यासार्थ प्रश्न –

1. यदि $P(E) = 0.05$ तो 'E नहीं' कि प्रायिकता क्या है?
2. A तथा B मित्र है, उनके जन्म दिवस की प्रायिकता ज्ञात करो।
 - (i) जब जन्म दिवस समान हो
 - (ii) जब जन्म दिवस भिन्न हो
3. एक अलीप वर्ष में केवल 52 सोमवार आने की प्रायिकता ज्ञात करे।
4. एक पासे को एक बार उछालने पर विषम संख्या आने की प्रायिकता ज्ञात करे।
5. एक सिक्के को 3 बार उछालने पर सभी पर तीनों बार H आने की प्रायिकता ज्ञात करो।
6. दो खिलाड़ी राम और श्याम शतरंज का मैच खेलते है यह ज्ञात कीजिए कि राम द्वारा मैच जीतने की प्रायिकता $\frac{4}{5}$ है। श्याम के जीतने की प्रायिकता क्या है?
7. एक पासे को दो बार उछाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि संख्याओं का योग (i) 9 हैं, (ii) 7 हैं।

Chapter - 11 रचनाएँ

अंक भार— 11 : प्रश्नों की संख्या – 5 (1(1) + 1(1) + 1(1) + 2(0) + 2(1) + 4(1))

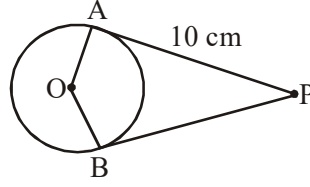
- * इस अध्याय में हम तीन प्रकार की रचनाओं के बारे में जानेंगे।
 - (i) रेखाखण्ड का विभाजन
 - (ii) किसी दिए गए त्रिभुज के समरूप एक त्रिभुज की रचना करना।
 - (iii) किसी वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की रचना।
- * एक वृत्त के बाह्य बिन्दु से वृत्त पर दो स्पर्श रेखायें खींची जा सकती हैं, जो बराबर होती हैं।
- * वृत्त तथा स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिन्दु को स्पर्श बिन्दु कहते हैं।
- * किसी वृत्त की त्रिज्या एवं स्पर्श रेखा के मध्य 90° का कोण बनता है।
- * ऐसी सरल रेखा जो वृत्त की परिधि को केवल एक ही बिन्दु पर स्पर्श करती है, स्पर्श रेखा कहलाती है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. एक वृत्त पर स्थित एक बिन्दु से कितनी स्पर्श रेखायें खींची जा सकती हैं –
 - (a) 0
 - (b) 1
 - (c) 2
 - (d) अनन्तAns (b)
2. एक वृत्त के अन्दर स्थित एक बिन्दु से कितनी स्पर्श रेखायें खींची जा सकती हैं –
 - (a) 0
 - (b) 1
 - (c) 2
 - (d) अनन्तAns (a)
3. ऐसी सरल रेखा जो वृत्त की परिधि को केवल एक ही बिन्दु पर स्पर्श करती है, कहलाती है –
 - (a) छेदन रेखा
 - (b) स्पर्श रेखा
 - (c) समान्तर रेखा
 - (d) असमान्तर रेखाAns (b)
5. वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को कहते हैं?
 - (a) जीवा
 - (b) स्पर्श रेखा
 - (c) समान्तर रेखा
 - (d) छेदन रेखाAns (d)
6. निम्नलिखित प्रश्नों में रिक्त स्थानों की पूर्ति करते हुए उत्तर पुस्तिका में लिखिए –
 - (i) किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गयी दो स्पर्श रेखाओं की लम्बाई होती है। (बराबर)
 - (ii) दो त्रिभुज समरूप होते हैं यदि उनके संगत कोण और उनकी संगत भुजाएँ हो। (बराबर, समान्तर)
 - (iii) अर्द्धवृत्त में बना कोण होता है। (समकोण)
 - (iv) का अर्थ रचना करने वाले त्रिभुज की भुजाओं तथा दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं के अनुपात से है। (स्केल गुणक)

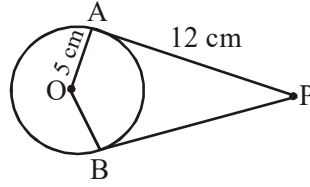
अति लघुतरात्मक प्रश्न -

1. दिये गये चित्र में यदि $AP = 10 \text{ cm}$ है तो PB का मान ज्ञात कीजिए।



उत्तर $AP + PB = 10 \text{ cm}$

2. दिये गये चित्र में यदि $OA = 5 \text{ cm}$ व $AP = 12 \text{ cm}$ तो OP ज्ञात कीजिए।



उत्तर कर्ण² + आधार² + लम्ब²

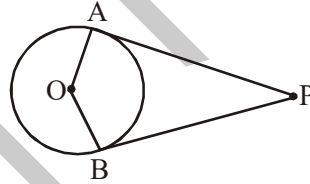
$$\text{कर्ण}^2 = 5^2 + 12^2$$

$$\Rightarrow \text{कर्ण} = 25 + 144$$

$$\Rightarrow \text{कर्ण} = 169$$

$$\Rightarrow \text{कर्ण} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

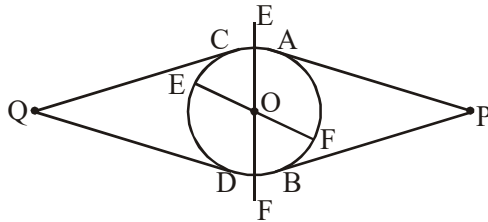
3. आकृति में $\angle AOB = 100^\circ$ है तो $\angle APB$ ज्ञात कीजिए।



उत्तर $\angle APB = 180^\circ - \angle AOB$

$$\Rightarrow \angle APB = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

4. आकृति से स्पर्श रेखायें कौन कौनसी है नाम बताइये।



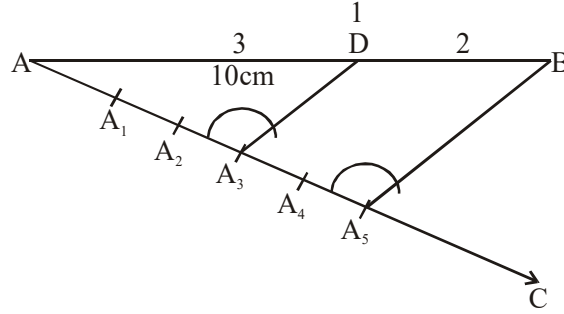
उत्तर स्पर्श रेखायें

AP, BP, QC, QD

लघुतरात्मक प्रश्न –

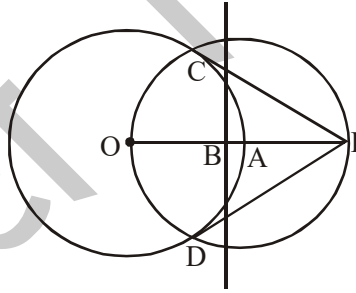
1. 10 सेमी लम्बा एक रेखाखण्ड खींचिए और इसे 3 : 2 अनुपात में विभाजित कीजिए।

उत्तर रचना –



1. सर्वप्रथम रेखाखण्ड $AB = 10 \text{ cm}$ खींचा।
 2. AB के साथ न्यून कोण बनाती हुयी किरण AC खींची।
 3. किरण AC पर A से प्रारम्भ करे 5 बराबर दूरी (परकार की सहायता से) पर बिन्दु A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 अंकित किए।
 4. A_5 को बिन्दु B से मिलाया।
 5. A_3 से $A_3D \parallel A_5B$ खींची जो AB को बिन्दु D पर मिलती है।
 6. इस प्रकार बिन्दु D, AB को 3 : 2 के अनुपात में विभाजित करता है।
2. 6 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। केन्द्र से 10 cm दूर स्थित एक बिन्दु से वृत्त पर स्पर्श रेखा युग्म की रचना कीजिए और उनकी लम्बाईयां मापिए।

उत्तर रचना –



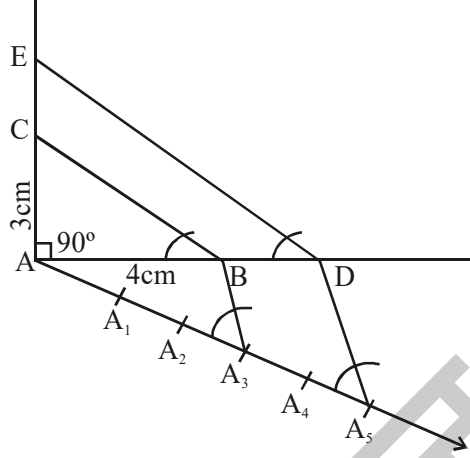
1. सर्वप्रथम $OA = 6 \text{ cm}$ त्रिज्या का एक वृत्त खींचा।
2. केन्द्र O से 10 cm दूरी पर बिन्दु P किया।
3. OP का समद्विभाजन किया।
4. समद्विभाजक OP रेखाखण्ड को बिन्दु B पर प्रतिच्छेद करता है।
5. बिन्दु B को केन्द्र मानकर OB त्रिज्या का एक अन्य वृत्त खींचा जो OA त्रिज्या वाले वृत्त को बिन्दु C व बिन्दु D पर प्रतिच्छेद करता है।
6. C व D को बिन्दु P से मिलाया।
7. इस प्रकार अभीष्ट स्पर्श रेखा युग्म PC व PD प्राप्त हुआ।

$$PC = PD = 8 \text{ cm}$$

निबंधात्मक प्रश्न –

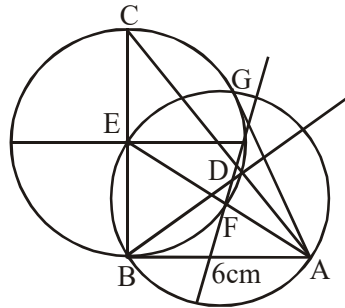
1. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएं (कर्ण के अतिरिक्त) 4 cm तथा 3 cm लम्बाई की हो। फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएं दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{5}{3}$ गुनी हो।

उत्तर रचना –



1. सर्वप्रथम दिए गए मानों से त्रिभुज ABC की रचना की, जिसमें $AB = 4 \text{ cm}$, $\angle A = 90^\circ$ तथा $AC = 3 \text{ cm}$
 2. अब AB के नीचे न्यून कोण बनाती हुयी AX किरण खींची।
 3. AX को परकार की सहायता से पांच A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 में इस प्रकार बांटा कि $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$ ।
 4. A_3 को B से मिलाया।
 5. A_5 से, $A_5D \parallel A_3B$ खींची जो बढ़ाए गए AB रेखाखण्ड को बिन्दु D पर मिलती है।
 6. D से $ED \parallel BC$ खींची, जो AC रेखाखण्ड को बिन्दु E पर मिलती है।
 7. इस प्रकार अभीष्ट समरूप त्रिभुज ADE प्राप्त हुआ जो त्रिभुज ABC की संगत भुजाओं की $\frac{5}{3}$ गुनी है।
2. ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें $AB = 6 \text{ cm}$, $BC = 8 \text{ cm}$ तथा $\angle B = 90^\circ$ है। B से AC पर BD लम्ब है। बिन्दुओं B, C, D से होकर जाने वाला एक वृत्त खींचा गया है। A से इस वृत्त पर स्पर्श रेखा की रचना कीजिए।

उत्तर रचना –



1. सर्वप्रथम त्रिभुज ABC की रचना की गई जिसमें $AB = 6 \text{ cm}$, $BC = 8 \text{ cm}$ तथा $\angle B = 90^\circ$ ।
2. $BD \perp AC$ खींचा ।
3. अब रेखाखण्ड BC का समद्विभाजन किया जिससे समद्विभाजक बिन्दु E प्राप्त हुआ ।
4. E को केन्द्र मानकर ED, EB, EC त्रिज्या से एक वृत्त खींचा ।
5. बिन्दु A को E से मिलाया तथा AE का समद्विभाजन किया, जो AE को समद्विभाजक बिन्दु F पर प्रतिच्छेद करता है ।
6. F को केन्द्र मानकर AF त्रिज का एक अन्य वृत्त खींचा जो EC त्रिज्या वाले वृत्त को बिन्दु B तथा G पर प्रतिच्छेद करता है ।
7. A को G से मिलाया । इस प्रकार अभीष्ट स्पर्श रेखा युग्म AB व AG प्राप्त हुआ ।

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न –

1. 4 cm, 5 cm और 7 cm भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएं दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{2}{3}$ गुनी हो ।
2. 3 cm त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए । इसके किसी बढ़ाए गए व्यास पर केन्द्र से 7 cm की दूरी पर स्थित दो बिन्दु P और Q लीजिए । इन दोनों बिन्दुओं से वृत्त पर स्पर्श रेखायें खींचिए ।

Chapter - 4 द्विघात समीकरण

अंक भार- 5 : प्रश्नों की संख्या - 4 (1(1) + 2(1) + 1(1) + 1(1))

* द्विघात समीकरण :- एक चर x में $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार की होती है।

जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएं हैं तथा $a \neq 0$

उदाहरण -

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$x(x + 1) = 0$$

$$x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$(x + 4)(x - 3) = 0$$

1. जांच कीजिए कि निम्न में से द्विघात समीकरण नहीं है -

(a) $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$

(b) $x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2$

(c) $(2x - 1)(x - 3) = (x + 5)(x - 1)$

(d) $x^2 - 2x = (-2)(3 - x)$

Ans (b)

2. दिया गया समीकरण $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$ द्विघात समीकरण है या नहीं।

हल समीकरण $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$

$$x^2 + x + 8 = x^2 - 4$$

$$x + 12 = 0$$

जिसमें x की अधिकतम घात 1 है। अतः द्विघात समीकरण नहीं है।

3. निम्न स्थितियों को द्विघात समीकरणों के रूप में व्यक्त करो -

(a) दो क्रमागत धनात्मक पूर्णाकों का गुणनफल 306 है।

हल माना एक धनात्मक पूर्णाक = x

तो क्रमागत दूसरा धनात्मक पूर्णाक = $x + 1$

प्रश्नानुसार $x \cdot (x + 1) = 306$

$$x^2 + x = 306$$

$$x^2 + x - 306 = 0$$

(b) एक आयताकार भूखण्ड का क्षेत्रफल 528 m^2 है। भूखण्ड की लम्बाई, चौड़ाई के दुगुने से एक अधिक है।

हल माना भूखण्ड की चौड़ाई = $x \text{ m}$

तो लम्बाई = $(2x + 1) \text{ m}$

प्रश्नानुसार $x(2x + 1) = 528$

$$2x^2 + x - 528 = 0$$

* द्विघात समीकरण का हल - गुणनखण्ड विधि

- गुणनखण्ड विधि द्वारा द्विघात समीकरण के हल निम्न प्रकार ज्ञात करते हैं -

(i) सर्वप्रथम RHS में 0 लेकर सभी पदों को LHS में लिखिए।

(ii) LHS के पदों को $(ax + b)(cx + d)$ के रैखिक गुणनखण्डों के रूप में लिखिए।

(iii) प्रत्येक गुणनखण्ड को 0 के बराबर करके वांछित हल प्राप्त करते हैं।

1. द्विघात समीकरण $6x^2 - x - 2 = 0$ के मूल ज्ञात करो।

हल दिया गया समीकरण $6x^2 - x - 2 = 0$
 $6x^2 + 3x - 4x - 2 = 0$
 $3x(2x + 1) - 2(2x + 1) = 0$
 $(3x - 2)(2x + 1) = 0$
 $3x - 2 = 0$ या $2x + 1 = 0$
 $x = \frac{2}{3}$ या $x = -\frac{1}{2}$

अतः द्विघात समीकरण के मूल $\frac{2}{3}$ $\frac{-1}{2}$ हैं।

2. गुणनखण्ड विधि द्वारा निम्न द्विघात समीकरणों के मूल ज्ञात करो।

(a) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

हल $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$
 $\sqrt{2}x^2 + 5x + 2x + 5\sqrt{2} = 0$
 $x(\sqrt{2}x + 5) + \sqrt{2}(\sqrt{2}x + 5) = 0$
 $(\sqrt{2}x + 5)(x + \sqrt{2}) = 0$
 $\sqrt{2}x + 5 = 0$ या $x + \sqrt{2} = 0$
 $x = \frac{-5}{\sqrt{2}}$ या $x = -\sqrt{2}$

अतः हल $x = \frac{-5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$

(b) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

हल $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

$$2x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} = 0$$

$$2x\left(x - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(2x - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$x - \frac{1}{4} = 0 \text{ या } 2x - \frac{1}{4} = 0$$

$$x = \frac{1}{4} \text{ या } x = \frac{1}{8}$$

अतः हल $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$

3. एक समकोण त्रिभुज की ऊंचाई इसके आधार से 7 cm कम है। यदि कर्ण 13 cm है तो आधार और ऊंचाई ज्ञात करो।

* द्विघात समीकरण – पूर्ण वर्ग विधि द्वारा हल ज्ञात करना

क्रियाविधि –

(1) दिए गए द्विघात समीकरण में x^2 के गुणांक का भाग दीजिए।

(2) अचर पद का पक्षान्तरण RHS में करें।

(3) x के गुणांक का आधा करके उसका वर्ग कर दोनों पक्षों में जोड़िये।

(4) दिया गया द्विघात समीकरण $(x \pm A)^2 = K^2$ में बदल जायेगा।

1. $2x^2 - 5x + 3 = 0$ को पूर्ण वर्ग विधि द्वारा हल करो।

हल दिया गया समीकरण

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

समीकरण को 2 से भाग देने पर

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

x का गुणांक $\frac{5}{2}$, का आधा $= \frac{5}{4}, \frac{5}{4}$ का वर्ग $\frac{25}{16}$ दोनों पक्षों में जोड़ने पर

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} = -\frac{3}{2} + \frac{25}{16}$$

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

दोनों पक्षों में वर्गमूल लेने पर

$$x - \frac{5}{4} = \pm \frac{1}{4}$$

+ चिह्न लेने पर $x = \frac{5}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

- चिह्न लेने पर $x = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

अतः द्विघात समीकरण के हल $x = \frac{3}{2}, 1$

2. पूर्ण वर्ग विधि द्वारा समीकरण $5x^2 - 6x - 2 = 0$ के मूल ज्ञात करो।

3. एक क्लास टेस्ट में शेफाली के गणित और अंग्रेजी में प्राप्त किए गए अंकों का योग 30 है। यदि उसको गणित में 2 अंक अधिक और अंग्रेजी में 3 अंक कम मिले होते, तो उनके अंको का गुणनफल 210 होता। उसके द्वारा दोनों विषयों में प्राप्त अंक ज्ञात कीजिए।

* द्विघात समीकरण – श्रीधराचार्य या द्विघाती सूत्र/द्विघाती सूत्र द्वारा मूल ज्ञात करना।

द्विघात समीकरण – $ax^2 + bx + c = 0$

श्रीधराचार्य या द्विघाती सूत्र

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

* मूलों की प्रकृति – द्विघात समीकरण के मूलों की प्रकृति $b^2 - 4ac$ पर निर्भर करती है।

(i) यदि $b^2 - 4ac > 0$ तब मूल वास्तविक तथा भिन्न – भिन्न होंगे।

(ii) यदि $b^2 - 4ac = 0$ तब मूल वास्तविक तथा समान होंगे।

(iii) यदि $b^2 - 4ac < 0$ तब मूल काल्पनिक होंगे। अर्थात् वास्तविक मूल नहीं होंगे।

1. द्विघात समीकरणों के मूल द्विघाती सूत्र द्वारा ज्ञात करो –

(a) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

हल यहां $a = 2$, $b = -7$, $c = 3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$= \frac{7 \pm 5}{4}$$

+ लेने पर

$$x = \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

– लेने पर

$$x = \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

अतः मूल $3, \frac{1}{2}$ हैं।

(b) $x - \frac{1}{x} = 3$

$$x^2 - 1 = 3x$$

$$x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$a = 1, b = -3, c = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}$$

+ लेने पर

$$x = \frac{3 + \sqrt{7}}{2}$$

- लेने पर

$$x = \frac{3 - \sqrt{7}}{2}$$

अतः मूल $x = \frac{3 - \sqrt{7}}{2}, \frac{3 - \sqrt{7}}{2}$

2. दो संख्याओं के वर्गों का अंतर 180 है। छोटी संख्या का वर्ग बड़ी संख्या का आठ गुना है। दोनों संख्याएं ज्ञात करो।
3. मैसूर और बेंगलोर के बीच 132 किमी यात्रा करने में एक एक्सप्रेस रेलगाड़ी, सवारी गाड़ी से 1 घंटा समय कम लेती है। यदि एक्सप्रेस रेलगाड़ी की औसत चाल सवारी गाड़ी की औसत चाल से 11 किमी/घंटा अधिक हो, तो दोनों रेलगाड़ियों की औसत चाल ज्ञात करो।

विविध प्रश्न -

1. निम्न में से द्विघात समीकरण है -

(a) $x^2 + 4x + 3 = (n+1)^2$

(b) $x + 5 = 0$

(c) $x^2 + 5x + 6 = 2(n-5)^2$

(d) उपरोक्त सभी

Ans (c)

2. द्विघात समीकरण $x^2 + 4x + 3 = 0$ में $\sqrt{b^2 - 4ac}$ का मान होगा -

(a) 1

(b) -2

(c) 28

(d) 2

Ans (d)

3. द्विघात समीकरण $2x^2 + x - 6 = 0$ के मूल होंगे -

(a) वास्तविक एवं अलग-अलग

(b) वास्तविक व समान

(c) काल्पनिक (वास्तविक नहीं)

(d) इनमें से कोई नहीं

Ans (a)

4. K के किस मान के लिये द्विघात समीकरण $Kx^2 + 6x + 3 = 0$ के मूल बराबर होंगे –

(a) 3

(b) -3

(c) 4

(d) -4

Ans (a)

5. k के ऐसे मान ज्ञात करो जिसके लिये द्विघात समीकरण $kx^2 + 6x + 1 = 0$ के मूल वास्तविक एवं भिन्न हो।

6. क्या परिमाण 80 m तथा क्षेत्रफल 400 m² का वर्गाकार पार्क संभव है, यदि है तो वर्ग की भुजा ज्ञात करो। (द्विघात समीकरण बनाकर)

7. दो मित्रों की आयु का योग 20 वर्ष है। चार वर्ष पूर्व उनकी आयु (वर्षों में) का गुणनफल 48 था तो उनकी वर्तमान आयु ज्ञात करो।

* द्विघात समीकरण – मूलों का योग एवं गुणनफल

द्विघात समीकरण – $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α व β हैं, तब

$$(i) \text{ मूलों का योग} = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$(ii) \text{ मूलों का योग} = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

Ex. द्विघात समीकरण $x^2 + 2x + 1 = 0$ के मूलों का योग एवं गुणनफल होगा।

हल माना मूल α व β हैं तब योग $\alpha + \beta = \frac{-2}{1} = -2$ एवं गुणनफल $\alpha \cdot \beta = \frac{1}{1} = 1$

* द्विघात समीकरण ज्ञात करना – जब मूलों का योग एवं गुणनफल दिया गया है –

$x^2 - (\text{मूलों का योग})x + \text{मूलों का गुणनफल} = 0$

Ex. वह द्विघात समीकरण ज्ञात करो जिसके मूलों का योग एवं गुणनफल क्रमशः -7, 12 हों।

हल द्विघात समीकरण – $x^2 - (\text{मूलों का योग})x + \text{गुणनफल} = 0$

$$\Rightarrow x^2 - (-7)x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 7x + 12 = 0$$

Ex. द्विघात समीकरण $5x^2 + 13x + k = 0$ का एक मूल दूसरे का व्युत्क्रम हो, तो k का मान ज्ञात करो।

हल माना समीकरण के मूल α व β हैं, तब

$$\beta = \frac{1}{\alpha}$$

अतः $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ (मूलों का गुणनफल)

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{k}{5} \quad (\text{since } \beta = \frac{1}{\alpha})$$

$$1 = \frac{k}{5}$$

$$k = 5$$

Ex. द्विघात समीकरण $(b-c)x^2 + (c-a)x + (a-b) = 0$ के मूल वास्तविक एवं बराबर हो तो सिद्ध करो कि $2b + a + c$ हल दिया गया समीकरण

$$(b-c)x^2 + (c-a)x + (a-b) = 0$$

$$\text{यहां } A = (b-c), B = (c-a), C = (a-b)$$

$$D = B^2 - 4AC$$

$$= (c-a)^2 - 4(b-c)(a-b)$$

द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक व बराबर है।

$$\text{अतः } D = 0$$

$$(c-a)^2 - 4(b-c)(a-b) = 0$$

$$c^2 + a^2 - 2ca - 4(ba - b^2 + ca + cb) = 0$$

$$c^2 + a^2 + 4b^2 - 2ca - 4ba + 4ca - 4cb = 0$$

$$(c+a-2b)^2 = 0$$

$$c+a-2b = 0$$

$$c+a = 2b$$

Chapter - 8 त्रिकोणमिति का परिचय

अंक भार-12 : प्रश्नों की संख्या-8 (2(1) + 3(1) + 1(1) + 1(1) + 2(1) + 1(1) + 1(1) + 1(1))

- * त्रिकोणमितीय अनुपात :- समकोण त्रिभुज की भुजाओं के अनुपातों का उसके न्यूनकोणों को सापेक्ष अध्ययन को त्रिकोणमितीय अनुपात कहते हैं।

$$\frac{LAL}{KKA}$$

$$\sin \theta = \frac{L}{K}$$

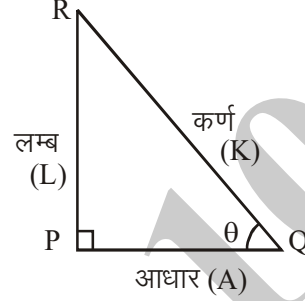
$$\cot \theta = \frac{A}{L}$$

$$\cos \theta = \frac{A}{K}$$

$$\sec \theta = \frac{K}{A}$$

$$\tan \theta = \frac{L}{A}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{K}{L}$$



- * व्युत्क्रम त्रिकोणमितीय अनुपात -

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \Rightarrow \sin \theta \cdot \operatorname{cosec} \theta = 1$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \Rightarrow \cos \theta \cdot \sec \theta = 1$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} \Rightarrow \tan \theta \cdot \cot \theta = 1$$

* $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$

- * विशेष कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों की सारणी -

डिग्री रेडियम	0°	30°	45°	60°	90°
/ त्रिकोणमितीय अनुपात	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot \theta$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

$\sec \theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
$\operatorname{cosec} \theta$	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

- * पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात –
 पूरक कोण – वे दो कोण जिनका योग 90° होता है।

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \theta) &= \cos \theta \\ \cos(90^\circ - \theta) &= \sin \theta \\ \tan(90^\circ - \theta) &= \cot \theta \\ \cot(90^\circ - \theta) &= \tan \theta \\ \sec(90^\circ - \theta) &= \operatorname{cosec} \theta \\ \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) &= \sec \theta\end{aligned}$$

- * त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ –

* $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
 $\Rightarrow \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta, \quad \Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$

* $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$
 $\Rightarrow \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta, \quad \Rightarrow \tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$

* $\operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$
 $\Rightarrow \operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta, \quad \Rightarrow \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta - 1$

Part - A (भाग-अ)

1. $\tan 45^\circ + \cot 45^\circ$ का मान होगा –
 (a) 1 (b) 2
 (c) 3 (d) 0 Ans (b)

Ans. $\tan 45^\circ + \cot 45^\circ$
 $= 1 + 1 = 2$

2. $2 \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$ का मान ज्ञात करो –
 (a) 1 (b) 2
 (c) 3 (d) 0 Ans a)

Ans. $2 \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$
 $= 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{2} = 1$

3. $\tan^2 60^\circ$ का मान है -

(a) $\sqrt{3}$

(b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(c) 3

(d) $\frac{1}{3}$

Ans (c)

Ans. $\tan^2 60^\circ = (\sqrt{3})^2 = 3 \{ \because \tan 60^\circ = \sqrt{3} \}$

4. यदि $\cos(90^\circ - \theta) = \frac{1}{2}$ हो तो θ का मान है -

(a) 90°

(b) 60°

(c) 45°

(d) 30°

Ans (d)

Ans. $\cos(90^\circ - \theta) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin \theta = \sin 30^\circ \Rightarrow \theta = 30^\circ$

5. $\frac{3 \sec 51^\circ}{\operatorname{cosec} 39^\circ}$ का मान है -

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 0

Ans (c)

Ans. $\frac{3 \sec(90^\circ - 39^\circ)}{\operatorname{cosec} 39^\circ} = \frac{3 \operatorname{cosec} 39^\circ}{\operatorname{cosec} 39^\circ} = 3$

6. $\sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ + 1$ बराबर है -

(a) 2

(b) 1

(c) $\frac{1}{2}$

(d) 0

Ans (a)

Ans. $\sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ + 1$

$1 + 1 = 2 \quad \{ \because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \}$

7. $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A$ बराबर है -

(a) 1

(b) 8

(c) 9

(d) 0

Ans (c)

Ans. $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A$

$= 9 [\sec^2 A - \tan^2 A] = 9 \times 1 = 9 \quad \{ \because \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1 \}$

8. यदि $\sin A = \frac{1}{2}$ और $\cos B = \frac{1}{2}$, तब $(A + B)$ का मान है -

(a) 30°

(b) 0°

(c) 60°

(d) 90°

Ans (d)

Ans. $\sin A = \frac{1}{2}$ $\sin B = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow \sin A = \sin 30^\circ$ $\Rightarrow \cos B = \cos 60^\circ$ $\therefore A + B = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$
 $\Rightarrow A = 30^\circ$ $\Rightarrow B = 60^\circ$

9. $\cos(90^\circ - 48^\circ)$ का मान है -

- (a) $\sin 48^\circ$ (b) $\sec 48^\circ$
(c) $\tan 48^\circ$ (d) $\cot 48^\circ$ Ans (a)

Ans. $\cos(90^\circ - 48^\circ)$
 $= \sin 48^\circ$ $\{\because \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta\}$

10. $\frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$ का मान $\theta = 45^\circ$ है -

- (a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) -1 Ans (b)

Ans. $\theta = 45^\circ$ रखने पर -

$$= \frac{1 - \cos 2 \times 45^\circ}{\sin 2 \times 45^\circ} = \frac{1 - \cos 90^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{1 - 0}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

* निम्नलिखित प्रश्नों में रिक्त स्थानों की पूर्ति करते हुए उत्तर पुस्तिका में लिखिए -

1. $\sin(90^\circ - \theta) = \dots\dots$

Ans. $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$

2. यदि $\sin \theta = \cos \theta$ तो $\theta = \dots\dots\dots$

Ans. $\sin \theta = \cos \theta$
 $\Rightarrow \sin \theta = \sin(90^\circ - \theta)$
 $\Rightarrow \theta = 90^\circ - \theta$ $\Rightarrow 2\theta = 90^\circ$, $\Rightarrow 45^\circ$

3. यदि $\tan A = \cot B$, तो $A + B$ का मान $\dots\dots\dots$ है।

Ans. $\tan A = \cot B$
 $\Rightarrow \tan A = \tan(90^\circ - B)$
 $\Rightarrow \tan A = \tan(90^\circ - B)$
 $\Rightarrow A = 90^\circ - B \Rightarrow A + B = 90^\circ$

4. $\frac{1 - \tan^2 45^\circ}{1 + \tan^2 45^\circ} = \dots\dots\dots$

Ans. $= \frac{1 - (1)^2}{1 + (1)^2} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$ $\{\because \tan 45^\circ = 1\}$

5. $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ = \dots\dots\dots$

Ans. $\cos 48^\circ - \sin(90^\circ - 48^\circ)$
 $= \cos 48^\circ - \cos 48^\circ = 0$

6. $(1 + \tan^2 \theta)(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)$ का मान $\dots\dots\dots$ है।

Ans. $= \sec^2 \theta(1 - \sin^2 \theta)$
 $= \sec^2 \theta \times \cos^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \times \cos^2 \theta = 1$

7. यदि $\tan \theta = \sqrt{3}$ हो तो θ का मान $\dots\dots\dots$ होगा।

Ans. $= \tan \theta = \sqrt{3}$
 $= \tan \theta = \tan 60^\circ$
 $= \theta = 60^\circ$

8. यदि $\tan A = 1$ है तो $\sec A \dots\dots\dots$ होगा -

Ans. $\therefore \sec^2 A = 1 + \tan^2 A$
 $= \sec^2 A = 1 + (1)^2$
 $= \sec^2 A = 1 + 1$
 $= \sec^2 A = 2$
 $= \sec A = \sqrt{2}$

अतिलघुतरात्मक प्रश्न -

1. $\sin^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ$ का मान है -

Ans. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$
 $= \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3+3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

2. $\frac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ}$

Ans. $= \frac{\sin(90^\circ - 72^\circ)}{\cos 72^\circ}$
 $= \frac{\cos 72^\circ}{\cos 72^\circ} = 1$

3. यदि $\tan 2A = \cot (A - 18^\circ)$, जहां $2A$ एक न्यून कोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए—

Ans. $\tan 2A = \cot (A - 18^\circ)$

$$\Rightarrow \cot (90^\circ - 2A) = \cot (A - 18^\circ) \quad \because \tan \theta = \cot(90^\circ - \theta)$$

$$\Rightarrow 90^\circ - 2A = A - 18^\circ$$

$$\Rightarrow 90^\circ + 18^\circ = A + 2A$$

$$\Rightarrow 108 = 3A$$

$$\Rightarrow A = \frac{108}{3} = 36^\circ$$

4. $\sin \theta \cdot \cos(90^\circ - \theta) + \cos \theta \sin(90^\circ - \theta) + 1$ का मान लिखिए —

Ans. $= \sin \theta - \sin \theta + \cos \theta \cdot \cos \theta + 1$

$$= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 1 \quad \left\{ \because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \right\}$$

$$= 1 + 1 = 2$$

5. $\cos^2 50^\circ + \cos^2 40^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए —

Ans. $= \cos^2 50^\circ + \cos^2 (90^\circ - 50^\circ)$

$$= \cos^2 50^\circ + \sin^2 50^\circ \quad \left\{ \because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \right\}$$

$$= 1$$

6. $\frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ}$

Ans. $= \frac{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \quad \left\{ \because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

7. यदि $\tan \theta = \cot \theta$ तो θ का मान ज्ञात कीजिए —

Ans. $\tan \theta = \cot \theta$

$$\Rightarrow \theta = 90^\circ - \theta$$

$$\Rightarrow \theta + \theta = 90^\circ \quad \Rightarrow 2\theta = 90^\circ \quad \Rightarrow \theta = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

8. त्रिकोणमितीय अनुपात $\tan A$ को $\sec A$ के पदों में लिखिए —

Ans. $\because \sec^2 - \tan^2 = 1$

$$\Rightarrow \sec^2 A - 1 = \tan^2 A$$

$$\Rightarrow \tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$$

9. $\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \theta - 1}}$ का मान लिखिए -

Ans. $= \frac{1}{\sqrt{\cot^2 \theta}} = \frac{1}{\cot \theta} = \tan \theta \quad \{\because \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta - 1\}$

10. $\cot 85^\circ + \cos 75^\circ$ को 0° और 45° के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए-

Ans. $\cot 85^\circ + \cos 75^\circ$
 $= \cot (90^\circ - 5^\circ) + \cos (90^\circ - 15^\circ)$
 $= \tan 5^\circ + \sin 15^\circ$

Part - B (भाग - ब)

1. यदि $\tan(A+B) = \sqrt{3}$ और $\tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $0^\circ < A+B \leq 90^\circ$, $A > B$ तो A व B का मान ज्ञात कीजिए-

Ans. $\because \tan(A+B) = \sqrt{3}$
 $\Rightarrow \tan(A+B) = \tan 60^\circ$
 $\Rightarrow A+B = 60^\circ \quad \dots (i)$

तथा $\tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $\Rightarrow A-B = 30^\circ \quad \dots (ii)$

समीकरण (i) व (ii) से -

$A+B = 60^\circ$

$A-B = 30^\circ$

$\Rightarrow 2A = 90^\circ$

$\Rightarrow A = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ समीकरण (i) में रखने पर -

$\Rightarrow 45^\circ + B = 60^\circ$

$\Rightarrow B = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$

2. $\frac{5\cos^2 60^\circ + 4\sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$ का मान है -

Ans. $= \frac{5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - (1)^2}{1}$

$\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$= 5 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{4}{3} - 1$

$= \frac{5}{4} + \frac{16}{3} - 1$

$$= \frac{15+64-12}{12} = \frac{67}{12}$$

3. $\triangle ABC$ में, जिसका कोण B समकोण है, यदि $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ तो निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए—

Ans. $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

$$\because \tan A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{L}{A}$$

$$\Rightarrow L=1, A=\sqrt{3}, K=?$$

पाइथागोरस प्रमेय से —

$$d. K^2 = \text{आधार}^2 + \text{लम्ब}^2$$

$$\Rightarrow \text{कर्ण}^2 = (\sqrt{3})^2 + (1)^2$$

$$\Rightarrow \text{कर्ण}^2 = 3 + 1$$

$$\Rightarrow \text{कर्ण}^2 = 4$$

सर्वप्रथम — $\angle A$ के लिए — $A=\sqrt{3}, L=1, K=2$

$$\sin B = \frac{L}{K} = \frac{1}{2}, \cos A = \frac{A}{K} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

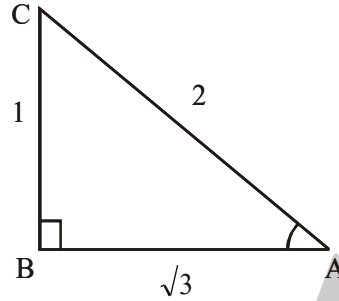
तथा $\angle C$ के लिए — $A=1, L=\sqrt{3}, K=2$

$$\cos C = \frac{A}{K} = \frac{1}{2}, \sin C = \frac{L}{K} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin A \cos C + \cos A \sin C$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$



4. सिद्ध कीजिए —

$$\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ = 1$$

Ans. LHS = $\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan (90^\circ - 48^\circ) \tan (90^\circ - 23^\circ)$

$$= \tan 48^\circ \tan 23^\circ \cot 48^\circ \cot 23^\circ$$

$$= \frac{\sin 48^\circ}{\cos 48^\circ} \cdot \frac{\sin 23^\circ}{\cos 23^\circ} \cdot \frac{\cos 48^\circ}{\sin 48^\circ} \cdot \frac{\cos 23^\circ}{\sin 23^\circ}$$

$$= 1$$

5. ΔOPQ में, जिसका कोण P समकोण है, $OP = 7$ cm और $OQ - PQ = 1$ cm, $\sin Q$ और $\cos Q$ के मान ज्ञात कीजिए—

Ans. ΔOPQ में —

पाइथागोरस प्रमेय से —

$$\text{कर्ण}^2 = \text{आधार}^2 + \text{लम्ब}^2$$

$$\Rightarrow OQ^2 = OP^2 + PQ^2$$

$$\Rightarrow (1 + PQ)^2 = 7^2 + PQ^2$$

$$\Rightarrow 1 + PQ^2 + 2PQ = 49 + PQ^2$$

$$\Rightarrow 2PQ = 49 - 1$$

$$\Rightarrow 2PQ = 48 \Rightarrow PQ = \frac{48}{2} = 24$$

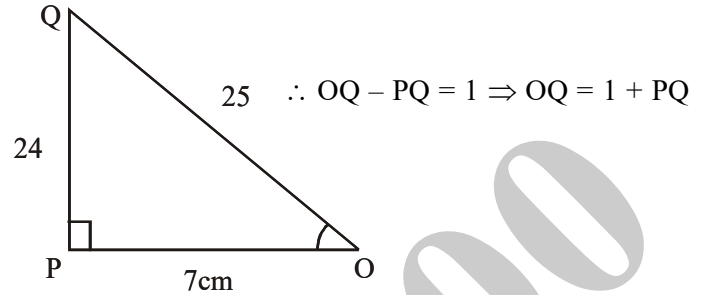
$$\therefore OQ = 1 + PQ$$

$$\Rightarrow OQ = 1 + 24 = 25$$

LQ के लिए — $A = 24, L = 7, K = 25$

$$\sin Q = \frac{L}{K} = \frac{7}{25}$$

$$\cos Q = \frac{A}{K} = \frac{24}{25}$$



6. यदि $3\cot A = 4$, तो $\frac{1 - \cos^2 A}{1 + \tan^2 A}$ का मान लिखिए —

Ans. $3\cot = 4$

$$\Rightarrow \cot A = \frac{4}{3} = \frac{A}{L} = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

यहां $A = 4, L = 3, K = ?$

पाइथागोरस प्रमेय से —

$$\text{कर्ण}^2 = \text{आधार}^2 + \text{लम्ब}^2$$

$$\Rightarrow \text{कर्ण}^2 = 4^2 + 3^2$$

$$\Rightarrow \text{कर्ण}^2 = 16 + 9$$

$$\Rightarrow \text{कर्ण}^2 = 25$$

$$\Rightarrow \text{कर्ण} = 5$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - \left(\frac{L}{A}\right)^2}{1 + \left(\frac{L}{A}\right)^2} = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} \\ &= \frac{1 - \frac{9}{16}}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{16 - 9}{16 + 9} = \frac{7}{25} \end{aligned}$$

Part - C (भाग-स)

$$1. \quad 5 \frac{\sin 17^\circ}{\cos 73^\circ} + 2 \frac{\cos 67^\circ}{\sin 23^\circ} - 6 \frac{\sin 15^\circ}{\cos 75^\circ}$$

$$\begin{aligned} \text{Ans.} &= 5 \frac{\sin(90^\circ - 73^\circ)}{\cos 73^\circ} + 2 \frac{\cos(90^\circ - 23^\circ)}{\sin 23^\circ} - 6 \frac{\sin(90^\circ - 75^\circ)}{\cos 75^\circ} \\ &= 5 \frac{\cos 73^\circ}{\cos 73^\circ} + 2 \frac{\sin 23^\circ}{\sin 23^\circ} - 6 \frac{\cos 75^\circ}{\cos 75^\circ} \\ &= 5 + 2 - 6 \\ &= 7 - 6 = 1 \end{aligned}$$

$$2. \quad \text{यदि } A, B \text{ और } C \text{ त्रिभुज } ABC \text{ के अन्तः कोण हो, तो दिखाइए कि } \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$

Ans. $\therefore A, B$ और $C, \Delta ABC$ के अन्तः कोण है।

$$\therefore A + B + C = 180^\circ$$

$$\Rightarrow B + C = 180^\circ - A$$

$$\Rightarrow \frac{B+C}{2} = \frac{180^\circ - A}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)$$

$$\therefore \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$

3. सिद्ध कीजिए -

$$(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cos^2 A$$

Ans. LHS लेने पर -

$$(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2$$

$$= \sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2 \sin A \cdot \operatorname{cosec} A + \cos^2 A + \sec^2 A + 2 \cos A \cdot \sec A$$

$$= \sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2 \sin A \cdot \frac{1}{\sin A} + 2 \cos A \cdot \frac{1}{\cos A} + \operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A$$

$$= 1 + 2 + 2 + \operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A$$

$$= 5 + \operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A$$

$$= 5 + 1 + \cot^2 A + 1 + \tan^2 A$$

$$\left\{ \because \operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A, \sec^2 A = 1 + \tan^2 A \right\}$$

$$= 7 + \tan^2 A + \cot^2 A, \text{ RHS}$$

4. सिद्ध कीजिए –

$$\frac{\cos A}{1 + \sin A} + \frac{1 + \sin A}{\cos A} = 2 \sec A$$

Ans. LHS लेने पर –

$$\begin{aligned} &= \frac{\cos A}{(1 + \sin A)} + \frac{(1 + \sin A)}{\cos A} \\ &= \frac{\cos^2 A + (1 + \sin A)^2}{\cos A(1 + \sin A)} \\ &= \frac{\cos^2 A + 1 + \sin^2 A + 2 \sin A}{\cos A(1 + \sin A)} \\ &= \frac{1 + 1 + 2 \sin A}{\cos A(1 + \sin A)} \\ &= \frac{2 + 2 \sin A}{\cos A(1 + \sin A)} \\ &= \frac{2(1 + \sin A)}{\cos A(1 + \sin A)} \\ &= \frac{2}{\cos A} = 2 \cdot \frac{1}{\cos A} = 2 \cdot \sec A \end{aligned}$$

RHS

5. सिद्ध कीजिए –

$$\sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} = \sec A + \tan A$$

Ans. LHS लेने पर –

$$\sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}}$$

हर का परिमेयकरण करने पर –

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{(1 + \sin A)}{(1 - \sin A)} \times \frac{(1 + \sin A)}{(1 + \sin A)}} \\ &= \sqrt{\frac{(1 + \sin A)^2}{1 - \sin^2 A}} \\ &= \sqrt{\frac{(1 + \sin A)^2}{\cos^2 A}} \\ &= \frac{1 + \sin A}{\cos A} \end{aligned}$$

$$\therefore (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A} \\
&= \sec A + \tan A \qquad \text{RHS}
\end{aligned}$$

* अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न –

1. सर्वसमिका $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$ का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए –

$$\frac{\sin \theta - \cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta - 1} = \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta}$$

2. निम्नलिखित समीकरण से x का मान ज्ञात कीजिए–

$$\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) + x \cos \theta \cot(90^\circ - \theta) = \sin(90^\circ - \theta)$$

3. $\frac{\sin^2 63^\circ + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Chapter - 2 बहुपद

अंक भार— 5 : प्रश्नों की संख्या — 4 (1(1) + 1(1) + 1(1) + 2(1))

बहुपद की घात (Degree of the polynomials) -

किसी बहुपद में चर की अधिकतम घात वाले पद के घातांक को उस बहुपद की घात कहते हैं।

- एक शून्येतर अचर बहुपद की घात शून्य होती है।

- शून्य बहुपद की घात अपरिभाषित है।

रैखिक बहुपद (Linear Polynomial) -

घात 1 वाले बहुपद को रैखिक बहुपद कहते हैं।

रैखिक बहुपद को $P(x) = ax + b$, $a \neq 0$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

द्विघाती बहुपद (Quadratic Polynomials) -

घात 2 वाले बहुपद को द्विघाती बहुपद कहते हैं।

द्विघाती बहुपद को $P(x) = ax^2 + bx + C$, $a \neq 0$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

त्रिघाती बहुपद (Cubic Polynomials) -

घात 3 वाले बहुपद को त्रिघाती बहुपद कहते हैं।

त्रिघाती बहुपद को $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

बहुपद $P(x)$ का $x = k$ पर मान -

यदि $P(x)$, x में कोई बहुपद है और k कोई वास्तविक संख्या है तो $P(x)$ में x को k से प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त वास्तविक संख्या बहुपद $P(x)$ का $x = k$ पर मान कहलाता है तथा इसे $P(k)$ द्वारा निरूपित करते हैं।

$P(x) = 8x^2 - 3x + 7$ का $x = 2$ पर मान

$P(2) = 8(2)^2 - 3(2) + 7 = 33$

बहुपद के शून्यक (Zeroes of Polynomial) -

एक वास्तविक संख्या k , बहुपद $P(x)$ का शून्यक कहलाती है। यदि $P(k) = 0$ है।

$P(x) = x - 4$ में $P(4) = 4 - 4 = 0$

अतः 4 बहुपद $x - 4$ का शून्यक है।

- एक शून्येतर अचर बहुपद का कोई शून्यक नहीं होता है।

- किसी बहुपद $P(x)$ का शून्यक बहुपद समीकरण $P(x) = 0$ का हल अर्थात् इसके मूल (root) होते हैं।

- रैखिक बहुपद $P(x) = ax + b$, $a \neq 0$ का शून्यक

समीकरण $ax + b = 0$

$x = \frac{-b}{a} = \frac{-(\text{अचर पद})}{x \text{ का गुणांक}}$ होता है।

अतः बहुपद के शून्यक उनके गुणांकों से सम्बन्धित होते हैं।

- रैखिक बहुपद का एक और केवल एक ही शून्यक होता है।
- द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के अधिकतम दो शून्यक होते हैं।
- त्रिघात बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d$ के अधिकतम तीन शून्यक होते हैं।
- n घात के बहुपद $P(x)$ के लिए $y = P(x)$ का ग्राफ x -अक्ष को अधिक से अधिक n बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करता है। अतः n घात के किसी बहुपद के अधिक से अधिक n शून्यक हो सकते हैं।

किसी बहुपद के शून्यकों और गुणांकों में सम्बन्ध (Relationship between zeroes and coefficients of a polynomial) -

- यदि α तथा β द्विघात बहुपद $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ के शून्यक हो तब

$$\text{शून्यकों का योग} = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{तथा शून्यकों का गुणनफल} = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

- इसी प्रकार यदि α , β तथा γ त्रिघात बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d$ के शून्यक हो तो

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

बहुपदों का गुणनफल -

- यदि $P(x)$ एक या एक से अधिक घात वाला बहुपद हो और a कोई इस प्रकार की वास्तविक संख्या हो कि $P(a) = 0$ तो $(x - a)$, $P(x)$ का एक गुणनखण्ड होता है।
- द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ का गुणनखण्ड करने के लिए b को ऐसी दो संख्याओं के योगफल के रूप में लिखते हैं जिनका गुणनफल ac हो। इन एक घात गुणनखण्डों को शून्य के बराबर रखकर शून्यक ज्ञात कर सकते हैं।
- त्रिघाती बहुपद का गुणनखण्ड करने के लिए पहले कम से कम एक गुणनखण्ड ज्ञात करके दूसरा गुणनखण्ड इसका भाग दे के ज्ञात कर लेंगे और प्राप्त दूसरे गुणनखण्ड के मध्य पद विभक्त करके आगे गुणनखण्ड कर सकते हैं।

बहुपदों के लिए विभाजन एल्गोरिथ्म (Division Algorithm for Polynomials) -

यदि $P(x)$ और $g(x)$ कोई दो बहुपद हैं जहाँ $g(x) \neq 0$ हो तो हम बहुपद $q(x)$ और $r(x)$ ऐसे प्राप्त कर सकते हैं कि

$$P(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

जहाँ $r(x) = 0$ या $r(x)$ की घात $< g(x)$ की घात है।

निम्न प्रश्नों के उत्तर का सही विकल्प चयन कर उत्तर पुस्तिक में लिखिए –

1. निम्न में से कौनसा बहुपद है –

(a) $2\sqrt{x} + 5$

(b) $x^{3/2} + x + 1$

(c) $x^2 - 4$

(d) $\frac{1}{x^2 + 4x + 1}$

Ans (c)

2. निम्न में से कौनसा रैखिक बहुपद है –

(a) $2x^2 + 4x + 2$

(b) $x - 2$

(c) $2y^2 - 3y + 4$

(d) $x^2 - 2$

Ans (b)

3. घात 2 वाले बहुपद कहलाता है –

(a) रैखिक बहुपद

(b) द्विघात बहुपद

(c) त्रिघात बहुपद

(d) इनमें से कोई नहीं

Ans (b)

4. रैखिक बहुपद $ax + b$ का शून्यक है –

(a) $\frac{a}{b}$

(b) $-\frac{a}{b}$

(c) $\frac{b}{a}$

(d) $-\frac{b}{a}$

Ans (d)

5. बहुपद $x^2 - 3x - 4$ का $x = 1$ पर मान है –

(a) 0

(b) -6

(c) 6

(d) -1

Ans (b)

अति लघुत्तरात्मक प्रश्न –

1. बहुपद $x^2 + 7x + 10$ के शून्यकों का योग और गुणनफल लिखिए।

उ. शून्यकों का योग = $\frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{-7}{1} = -7$

शून्यकों का गुणनफल = $\frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{10}{1} = 10$

2. बहुपद $x^2 - 3x - 4$ का $x = -1$ पर मान ज्ञात करो।

उ. $P(x) = x^2 - 3x - 4$

$P(-1) = (-1)^2 - 3(-1) - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$

3. $2x^2 + 3x + 1$ को $x + 2$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

उ. बहुपद $x + 2$ का शून्यक $x = -2$ है।

\therefore शेषफल = $2(-2)^2 + 3(-2) + 1$
= 3

4. बहुपद $2x^2 - 8x + 6$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणाकों के बीच के संबंध की सत्यता की जांच कीजिए।

उ. $2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 6x - 2x + 6$
 $= 2x(x-1) - 2(x-3)$
 $= (x-3)(2x-2)$

शून्यकों के लिए

$$(x-3)(2x-2) = 0$$

$$\therefore x-3=0 \text{ या } 2x-2=0$$

$$\therefore \text{शून्यक } 3 \text{ तथा } 1 \text{ हैं।}$$

शून्यकों का योग $= 3 + 1 = 4 = \frac{-(-8)}{2} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यकों का गुणनफल $= 3 \times 1 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

5. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः 4 और 1 हैं।

उ. माना द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α और β हैं।

$$\therefore \alpha + \beta = 4 = \frac{-b}{a}$$

और $\alpha\beta = 1 = \frac{c}{a}$

\therefore यदि $a = 1$ हो तो $b = -4$ और $c = 1$

\therefore द्विघात बहुपद $x^2 - 4x + 1$

वैकल्पिक हल -

$$x^2 - (\text{शून्यकों का योगफल})x + \text{शून्यकों का गुणनफल}$$

$$= x^2 - (4)x + 1$$

$$= x^2 - 4x + 1$$

6. $3x^2 + x^2 + 2x + 5$ को $1 + 2x + x^2$ से भाग दीजिए।

उ.

$$\begin{array}{r} 3x-5 \\ x^2+2x+1 \overline{) 3x^3+x^2+2x+5} \\ \underline{3x^2+6x^2+3x} \\ 6x^2+3x \\ \underline{6x^2+12x+6} \\ 12x+3 \\ \underline{12x+24} \\ 3 \\ \underline{3} \\ 0 \end{array}$$

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न –

1. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः -3 तथा 2 है।
2. द्विघात बहुपद $3x^2 - x - 4$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की सत्यता की जांच कीजिए।
3. $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ को $x - 1 - x^2$ से भाग दीजिए और विभाजन एल्गोरिथ्म की सत्यता की जांच कीजिए।
4. बहुपद $x^2 - 2x - 9$ के शून्यक ज्ञात कीजिए।

शेखावाटी मिशन-100

ईकाई – सांख्यिकी

अंक भार – 15

प्रश्नों के अंक भार

वस्तुनिष्ठ – 3 (1)

अति अलघुरात्मक – 1 (1)

अलघुरात्मक – 2 (2)

निबंधात्मक – 4 (1)

दीर्घ उत्तरीय – 3 (1)

समान्तर माध्य (\bar{X})

$$\text{समान्तर माध्य} = \frac{\text{आकड़ों का योग}}{\text{आकड़ों की संख्या}}$$

$$(a) \text{ व्यक्तिगत श्रेणी का माध्य} = \frac{\sum x_f}{n} \quad [n = \text{आकड़ों की संख्या}]$$

$$\sum X_f = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$$

$$(b) \text{ अवर्गीकृत बटन } \bar{X} = \frac{\sum F_i X_f}{\sum F_r}$$

$$(c) \text{ कल्पित माध्य द्वारा } = \bar{X} = a + \frac{\sum F_i d_r}{\sum F_r}$$

जहां a = कल्पित माध्य (चर X का माध्य मान)

$$(d) \text{ पद विचलन विधि } = \bar{X} = a + \frac{\sum F_i v_r}{\sum F_r} \times h$$

जहां a = कल्पित माध्य

$$u_f = \frac{d_i}{h} = \frac{X_f - A}{h}, \quad h = \text{वर्ग अन्तराल}$$

1. आकड़ें 2, 5, 3, 7, 6, 1 का समान्तर माध्य ज्ञात करो।

$$\text{उ. समान्तर माध्य} = \frac{\text{आकड़ों का योग}}{\text{आकड़ों की संख्या}}$$

$$\bar{X} = \frac{2+3+5+7+6+1}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

$$\bar{X} = 4$$

2. निम्न बारम्बारता बंटन का प्रत्यक्ष विधि को समान्तर माध्य ज्ञात कीजिये।

चर	2	4	6	8	10
बारम्बारता	1	2	3	2	1

उ.

चर x	बारम्बारता f	$x \times f$
2	1	2
4	2	8
6	3	18
8	2	16
10	1	10
योग	$\sum f = 9$	$\sum xf = 54$

$$\therefore \text{समान्तर माध्य} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{54}{9}, \bar{X} = 6$$

3. निम्नलिखित सारिणी एक स्कूल की कक्षा X के 50 विद्यार्थियों के गणित में प्राप्त अंकों को दर्शाती है।

प्राप्तांक	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
विद्यार्थियों की संख्या	5	9	8	12	13	3

माध्य अंक ज्ञात कीजिए।

उ.

प्राप्तांक वर्ग अन्तराल	बारम्बारता f	मध्य मान (x)	$f \times x$
20-30	5	25	125
30-40	9	35	315
40-50	8	45	360
50-60	12	55	660
60-70	13	65	845
70-80	3	75	225
	$\sum f = 50$		$\sum fx = 2530$

$$\therefore \text{समान्तर माध्य} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{2530}{50}, \bar{X} = 50.6$$

4. यदि 5,7,9 X का समान्तर माध्य 9 है तो X का मान ज्ञात करो।

उ. समान्तर माध्य = $\frac{\text{आकड़ों का योग}}{\text{आकड़ों की संख्या}}$

$$\frac{9}{1} = \frac{5+7+9+X}{4}$$

$$\Rightarrow 21 + X = 9 \times 4$$

$$\Rightarrow X = 36 - 21$$

$$X = 15$$

5. यदि X_1, X_2, \dots, X_n का माध्य \bar{X} हो तो mX_1, mX_2, \dots, mX_n का माध्य ज्ञात करें

उ. अभीष्ट माध्य = $m\bar{X}$

उदाहरण – यदि 5 संख्याओं का माध्य 15 है। प्रत्येक संख्या को 4 से गुणा करने पर नया माध्य क्या होगा।

उ. अभीष्ट माध्य = $15 \times 4 = 60$

6. निम्न बारम्बारता बंटन का कल्पित माध्य से समान्तर माध्य ज्ञात करो।

वर्ग अन्तराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारम्बारता	7	10	15	8	10

उ.

वर्ग अन्तराल	मध्य मान (X_i)	f_i	$d_i = X_i - A$	$f_i d_i$
0-10	5	7	5-25 = -20	-140
10-20	15	10	15-25 = -10	-100
20-30	25	15	25-25 = 0	0
30-40	35	8	35-25 = 10	80
40-50	45	10	45-25 = 20	200
		$\sum f_i = 50$		$\sum f_i d_i = 40$

कल्पित माध्य = a

चर X के मध्य का मान (a) = 25

समान्तर माध्य = $a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

$$\bar{X} = 25 + \frac{40}{50}$$

$$\bar{X} = 25 + .8 = 25.8$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न –

1. प्रथम पांच पूर्ण संख्याओं का माध्य है?

- (a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

Ans (b)

2. प्रथम पांच प्राकृत संख्याओं का माध्य है?

- (a) 5 (b) 3
(c) 15 (d) 12

Ans (b)

3. A, B, C का गणितीय माध्य निम्नलिखित में से कौन सा होगा –

- (a) $A + B + C$ (b) $\frac{ABC}{3}$

- (c) ABC (d) $\frac{A+B+C}{3}$ Ans (d)
4. वर्ग अन्तराल 24-30 का वर्ग चिह्न क्या होगा?
 (a) 16 (b) 27
 (c) 30 (d) 24 Ans (b)
5. बहुलक $Z = 18 + \frac{15-6}{30-6-9} \times 5$ में बहुलक वर्ग की बारम्बारता है -
 (a) 15 (b) 18
 (c) 6 (d) 9 Ans (a)
6. संख्याओं 1, 2, 3, n का माध्य है -
 (a) $\frac{n(n+1)}{2}$ (b) $\frac{n}{2}$
 (c) $\frac{n+1}{2}$ (d) कोई नहीं Ans (c)
7. निम्नलिखित में से कौन आलेख द्वारा निर्धारित नहीं किया जा सकता है?
 (a) माध्यक (b) बहुलक
 (c) माध्य (d) कोई नहीं Ans (c)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न -

1. यदि निम्न बंटन का माध्य 5 है तो P का मान है -

u	2	4	6	P
f	3	2	1	4

u	f	uf
2	3	6
4	2	8
6	1	6
P	4	4P

उ.

$$\text{माध्य } \bar{X} = \frac{\sum uf}{\sum f}$$

$$5 = \frac{6+8+5+4P}{10}$$

$$4P + 20 = 50$$

$$4P = 50 - 20$$

$$P = \frac{30}{4} = 7.5$$

2. पांच संख्याओं का औसत 18 है। यदि एक संख्या हटा दी जाती है तो औसत 16 हो जाता है हटाई गई संख्या का मान ... होगा।
 उ. हटाई गई संख्या = $18 \times 5 - 16 \times 4$
 $= 90 - 64 = 26$

अभ्यास हेतु -

1. निम्न बारम्बारता बंटन से माध्य ज्ञात कीजिए।

वर्ग	40-44	44-48	48-52	52-56	56-60	60-64
बारम्बारता	5	6	5	9	3	2

माध्यक

व्यक्तिगत श्रेणी का माध्यक -

1. चर X के n पदों की आरोही व अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाये।
 2. निम्न सूत्र से माध्यक ज्ञात किया जायेगा -

$$\text{माध्यक} = \begin{cases} \left(\frac{n+1}{2}\right)\text{वां पद/मध्य पद, यदि } n \text{ विषम है} \\ \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\text{वां पद} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वां पद}}{2} / \text{मध्य दो पदों का औसत, यदि } n \text{ सम है} \end{cases}$$

1. निम्न आंकड़ों का माध्यक ज्ञात करो -

1, 6, 3, 5, 7, 9, 11, 4

- उ. आकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर

1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11 $n = 8$ सम

$$\therefore \text{माध्यक} = \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6 \quad [\text{उपरोक्त सूत्र के अनुसार}]$$

2. यदि निम्न आकड़े आरोही क्रम में व्यवस्थित है तथा इसका माध्यक 7 है। X का मान ज्ञात करो।

3, 4, 5, X, 8, 9, 10

- उ. $n = 7$ विषम आकड़ें

माध्यक = मध्य पद

7 = 4वां पद

7 = X

अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन का माध्यक –

a. संचयी बारम्बारता सारणी बताइये।

b. $\frac{N}{2} = \frac{\sum f}{2}$ ज्ञात कीजिये।

c. $\frac{N}{2}$ से ठीक अधिक संचयी बारम्बारता के संगत चर का मान ही अभीष्ट माध्यम है।

1. निम्न बारम्बारता बंटन का माध्यक ज्ञात करो –

X	5	6	7	8
f	2	3	3	2

उ.

x	f	$c.f$
5	2	2
6	3	5
7	3	8
8	2	10

$$\sum f = 10$$

$$\frac{N}{2} = \frac{\sum f}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

5 से ठीक अधिक संचयी बारम्बारता के संगत चर $X = 7$

वर्गीकृत बारम्बारता बंटन का माध्यक –

a. संचयी बारम्बारता सारणी बनाइये।

b. $\frac{N}{2} = \frac{\sum f}{2}$ ज्ञात कीजिये।

c. $\frac{N}{2}$ से ठीक अधिक संचयी बारम्बारता के संगत वर्ग माध्यक वर्ग है।

d. माध्यक $M = L + \frac{\frac{N}{2} - c.f}{f} \times h$

L = माध्यक वर्ग की निम्न सीमा, f = माध्यक वर्ग की बारम्बारता

h = माध्यक वर्ग का अन्तराल, $c.f$ = माध्यक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की संचयी बारम्बारता

1. निम्न बारम्बारता बंटन का माध्यक ज्ञात करो –

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारम्बारता	4	28	42	26	10

उ.

वर्ग	f	$c.f$
0-10	4	4
10-20	28	32
20-30	42	74
30-40	26	100
40-50	10	110

$$\sum f = 110$$

$$\frac{N}{2} = \frac{\sum f}{2} = \frac{110}{2} = 55$$

55 से ठीक अधिक संचयी बारम्बारता 74 के संगत वर्ग 20-30

∴ माध्यक वर्ग = 20-30

$$L = 20, h = 10, f = 42, cf = 32$$

$$\text{माध्यक } M = L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times h$$

$$\text{माध्यक} = 20 + \frac{55 - 32}{42} \times 10$$

$$\text{माध्यक} = 20 + \frac{23}{42} \times 10$$

$$\text{माध्यक} = 20 + \frac{230}{42}$$

$$\text{माध्यक} = 20 + 5.48$$

$$\text{माध्यक} = 25.48$$

बहुलक –

किसी श्रेणी का वह मूल्य जिसकी बारम्बारता सर्वाधिक होती है, बहुलक कहलाता है।

(a) वर्गीकृत बारम्बारता वाला वर्ग बहुलक वर्ग होगा।

1. सर्वाधिक बारम्बारता वाला वर्ग बहुलक वर्ग होगा।

$$2. \text{ बहुलक सूत्र } Z = L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h$$

L = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा, f_1 = बहुलक वर्ग की बारम्बारता

h = बहुलक वर्ग का अन्तराल, f_0 = बहुलक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की बारम्बारता

f_2 = बहुलक वर्ग से ठीक बाद वाले वर्ग की बारम्बारता

उदाहरण – निम्न बारम्बारता बंटन का बहुलक ज्ञात करो –

वर्ग	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
बारम्बारता	6	20	25	13	5

उ. सर्वाधिक बारम्बारता वाला वर्ग बहुलक वर्ग = 30–40

$$\text{बहुलक सूत्र} = L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h$$

$$L = 30, f_1 = 25, f_0 = 20, f_2 = 13, h = 10$$

$$\text{बहुलक} = 30 + \frac{25 - 20}{2 \times 25 - 20 - 13} \times 10$$

$$= 20 + \frac{5}{50 - 33} \times 10$$

$$= 30 + \frac{50}{17}$$

$$= 30 + 2.94$$

$$\text{बहुलक} = 32.94$$

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न –

1. निम्नलिखित बंटन सारणी को एक 'कम प्रकार' के संचयी बारम्बारता बंटन में बदलिए और ग्राफ पेपर पर आलेखित करने वाले सभी बिन्दुओं को लिखिए।

वर्ग	100–120	120–140	140–160	160–180	180–200
बारम्बारता	12	14	8	6	10

उ. से कम प्रकार का संचयी बारम्बारता बंटन

x	संचयी बारम्बारता cf
120 से कम	12
140 से कम	$12 + 14 = 26$
160 से कम	$16 + 8 = 34$
180 से कम	$34 + 6 = 40$
200 से कम	$40 + 10 = 50$

आलेखित करने वाले बिन्दुओं

A(120, 12), B(140, 26), C(160, 34), D(180, 40), E(200, 50)

2. निम्नलिखित बंटन सारणी को 'अधिक के प्रकार' के बंटन में बदलिए।

उत्पादन (kg)	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80
फार्मों की संख्या	2	8	12	24	38	16

उ.

उत्पादन	फार्मों की संख्या
50 से अधिक	2
55 से अधिक	8
60 से अधिक	12
65 से अधिक	24
70 से अधिक	38
75 से अधिक	16

1. केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप है -

(a) माध्य

(b) माध्यक

(c) बहुलक

(d) उपरोक्त सभी

Ans (d)

2. उस प्रेक्षण का मान जिसकी बारम्बारता सबसे अधिक होती है -

(a) माध्य

(b) माध्यक

(c) बहुलक

(d) उपरोक्त सभी

Ans (c)

3. कल्पित माध्य विधि से माध्य ज्ञात करने का सूत्र लिखिए -

उ.
$$\bar{X} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$$

4. प्राप्तांक 7, 3, 5, 12, 10, 9 की माध्यिका है –
 (a) 5 (b) 12
 (c) 4 (d) 8 Ans (d)
5. 3, 5, 4, 3, 2, 3, 1, 3 का बहुलक है –
 (a) 5 (b) 1
 (c) 3 (d) 4 Ans (c)
6. बारम्बारता बंटन के मध्य, माध्यक तथा बहुलक के बीच निम्न सम्बंध है –
 (a) बहुलक = 3 माध्य – 2 माध्यक (b) बहुलक = 3 माध्यक – 2 माध्य
 (c) बहुलक = 2 माध्यक – 3 माध्य (d) बहुलक = 3 माध्यक + 2 माध्य Ans (b)
7. यदि किसी बंटन का माध्य 16 तथा बहुलक 13 हो तो माध्यक ज्ञात कीजिए–
 (a) 14 (b) 13
 (c) 16 (d) 15 Ans (d)
8. संचयी बारम्बारता सारणी का उपयोग होता है, ज्ञात करने में –
 (a) माध्य (b) माध्यक
 (c) बहुलक (d) उपरोक्त सभी Ans (b)

अभ्यास हेतु –

1. 2, 3, 4, 5, 6 की माध्यिका ज्ञात करो।
 2. एक बंटन का माध्य तथा माध्यक क्रमशः 14 और 15 है। अतः बहुलक का मान होगा।
 3. निम्न बंटन सारणी का माध्यक ज्ञात करो–

वर्ग	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25
बारम्बारता	10	15	12	20	9

4. समान्तर माध्य ज्ञात करो –

x	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
y	8	12	10	11	9

5. निम्न बारम्बारता का बहुलक 36 है। लुप्त बारम्बारता (f) का मान ज्ञात कीजिए –

वर्ग	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
बारम्बारता	8	10	f	16	12	6	7

Chapter -7 निर्देशांक ज्यामिति

अंकभार – 6 प्रश्न 4 (1(1) + 1(1) + 3(1) + 1(1) = 6(4))

- किसी बिन्दु P का x – निर्देशांक या भुज x हो और y – निर्देशांक या कोटि y हो तो P के निर्देशांक (x, y) लिखते हैं।
- मूल बिन्दु के निर्देशांक $(0, 0)$ होते हैं।
- दो बिन्दुओं के बीच की दूरी – दो बिन्दुओं $P(x_1, y_1)$ व $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- मूल बिन्दु $(0, 0)$ से किसी बिन्दु (x, y) की दूरी $= \sqrt{x^2 + y^2}$

प्रश्न 1. बिन्दु $(3, 4)$ की y – अक्ष से दूरी होगी।

- (अ) 1 (ब) 4 (स) 2 (द) 3

उत्तर– (द) 3

प्रश्न 2. बिन्दु $(6, -3)$ की x – अक्ष से दूरी होगी।

- (अ) 6 (ब) 3 (स) 2 (द) 5

उत्तर– (ब) 3

x अक्ष से दूरी $= y$ – निर्देशांक का धनात्मक मान $= 3$

प्रश्न 3. बिन्दु $(0, 3)$ और $(-2, 0)$ के बीच की दूरी..... है।

उत्तर– $\sqrt{13}$

प्रश्न 4. बिन्दु $(5, 7)$ की कोटि है।

- (अ) 5 (ब) -7 (स) 7 (द) -5

उत्तर– (ब) -7

प्रश्न 5 यदि बिन्दु $(x, 3)$ और $(5, 7)$ के बीच की दूरी 5 हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर– बिन्दु $(x, 3)$ व $(5, 7)$ के बीच की दूरी $= 5$

$$\sqrt{(x - 5)^2 + (3 - 7)^2} = 5$$

$$(x - 5)^2 + (-4)^2 = 25$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$(x - 2)(x - 8) = 0$$

$$x = 2, 8$$

प्रश्न 6 बिन्दु (3,4) की मूल बिन्दु से दूरी ज्ञात करो।

उत्तर- बिन्दु (3,4) की मूल बिन्दु (0,0) से दूरी

$$= \sqrt{(0-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

प्रश्न 7 सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (-2, -1), (-1, 1), (5, -2) और (4, -4) एक आयत के शीर्ष हैं।

उत्तर- माना दिये गये बिन्दु A (-2, -1) B (-1, 1), C (5, -2) और D (4, -4) है।

$$AB = \sqrt{[-2 - (-1)]^2 + [-1 - 1]^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{[5 - (-1)]^2 + [-2 - 1]^2} = \sqrt{(6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{45}$$

$$CD = \sqrt{[4 - 5]^2 + [-4 - (-2)]^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$DA = \sqrt{[4 - (-2)]^2 + [-4 - (-1)]^2} = \sqrt{(6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{45}$$

$$AB = CD \text{ और } BC = DA$$

अतः सम्मुख भुजाएं बराबर हैं।

$$\text{विकर्ण } AC = \sqrt{[5 - (-2)]^2 + [-2 - (-1)]^2} = \sqrt{(7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{50}$$

$$BD = \sqrt{[4 - (-1)]^2 + [-4 - 1]^2} = \sqrt{(5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}$$

अतः विकर्ण बराबर है।

फलतः दिये गए बिन्दु A, B, C, D आयत के शीर्ष हैं।

प्रश्न 8 सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (1,1), (-2,7) और (3, -3) सरेख हैं।

उत्तर- माना A (1,1), B (-2,7) और C (3, -3) दिए गए बिन्दु हैं।

$$AB = \sqrt{[(-2) - 1]^2 + [7 - 1]^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{[3 - (-2)]^2 + [-3 - 7]^2} = \sqrt{25 + 100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

$$CA = \sqrt{[1 - 3]^2 + [1 - (-3)]^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$BC = AB + CA$$

अतः बिन्दु A, B व C संरेख है।

प्रश्न 9 सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(2, -2), (-2, 1)$ और $(5, 2)$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष है।

उत्तर- माना $A(2, -2), B(-2, 1)$ और $C(5, 2)$ दिये गये बिन्दु हैं।

दो बिन्दुओं के बीच की दूरी = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$AB = \sqrt{[-2 - 2]^2 + [1 - (-2)]^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25}$$

$$BC = \sqrt{[5 - (-2)]^2 + [2 - 1]^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50}$$

$$CA = \sqrt{[2 - 5]^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$$

$$BC^2 = AB^2 + CA^2$$

बौद्धायन प्रमेय से ΔABC एक समकोण त्रिभुज हैं।

अतः A, B व C एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष है।

प्रश्न 10. x -अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(-2, -5)$ और $(2, -3)$ से समदूरस्थ है।

उत्तर- माना x -अक्ष पर स्थित अभिष्ट बिन्दु $P(x, 0)$ है जो बिन्दु $A(-2, -5)$ और $B(2, -3)$ से समान दूरी पर है।

$$PA = PB$$

$$\text{या } \sqrt{(-2 - x)^2 + (-5 - 0)^2} = \sqrt{(2 - x)^2 + (-3 - 0)^2}$$

$$\text{या } (-2 - x)^2 + 25 = (2 - x)^2 + 9$$

$$\text{या } 4 + x^2 + 4x + 25 = 4 + x^2 - 4x + 9$$

$$\text{या } 4x + 4x = 9 - 25$$

$$\text{या } 8x = -16$$

$$\text{या } x = -2$$

x -अक्ष पर वह बिन्दु $(-2, 0)$ होगा।